



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ประจำปีการศึกษา 2553 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

สอบวันอาทิตย์ที่ 28 พฤศจิกายน 2553

เวลา 9.00 - 12.00 น.

ค่าเข้าแข่ง ข้อสอบฉบับนี้แบ่งออกเป็น 3 ตอน คะแนนเต็ม 100 คะแนน

ตอนที่หนึ่ง เป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ มี 15 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน รวม 30 คะแนน

1. กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์

ถ้า $A = \{1, 4, 5, 8, 10\}$, $B = \{2, 3, 5, 8, 9\}$ และ $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

แล้ว จำนวนสมาชิกของ $(A \cup B') \cap C$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- ก. 1
- ข. 2
- ค. 3
- ง. 4

2. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ ถ้า $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

แล้ว ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

- ก. $\sim(p \rightarrow s)$
- ข. $p \wedge r$
- ค. $\sim(r \rightarrow q)$
- ง. $q \leftrightarrow s$

3. กำหนดให้ เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนเต็ม จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\forall x \exists y [x + 3y = 4]$

(2) $\forall x \forall y [2^{|x-y|}]$ เป็นจำนวนคู่

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- ก. ข้อ (1) เป็นจริง และข้อ (2) เป็นจริง
- ข. ข้อ (1) เป็นจริง และข้อ (2) เป็นเท็จ
- ค. ข้อ (1) เป็นเท็จ และข้อ (2) เป็นจริง
- ง. ข้อ (1) เป็นเท็จ และข้อ (2) เป็นเท็จ





4. ถ้า c เป็นค่าคงตัวที่ทำให้ $x - 2$ หาร $x^5 - 3x^4 + 6x + c$ เหลือเศษเท่ากับ 4

แล้ว c เป็นสมาชิกของเซตใดต่อไปนี้

ก. $\{-6, 2\}$

ข. $\{-4, 8\}$

ค. $\{-2, 4\}$

ง. $\{-8, 6\}$

5. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{3 - 2x}{1 - |1 - x|} \geq 0$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

ก. $A' \cap [2, 3) \neq \emptyset$

ข. $A' \subset (-\infty, 0)$

ค. $A \cap (1, 2) = \emptyset$

ง. $A \subset (1, \infty)$

6. ถ้าจำนวนเต็มบวก x และ 30 มี ห.ร.ม. เป็น 6 และห.ค.ร. เป็น 210

แล้ว x เป็นสมาชิกของเซตใดต่อไปนี้

ก. $\{24, 36\}$

ข. $\{42, 72\}$

ค. $\{48, 66\}$

ง. $\{54, 96\}$





7. ถ้า $f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (5, 2)\}$

$g = \{(1, 2), (2, 3), (4, 1), (5, 4)\}$

และ $h = \{(2, 4), (3, 1), (4, 2), (5, 1)\}$

แล้ว $(f \circ g) + h$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\{(2, 5), (4, 5)\}$

ข. $\{(2, 5), (4, 4)\}$

ค. $\{(2, 3), (4, 5)\}$

ง. $\{(2, 11), (3, 2), (4, 3), (5, 7)\}$

8. ถ้า F_1 และ F_2 เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $\frac{(y - 20)^2}{5} - \frac{(x + 11)^2}{4} = 1$

แล้ว ส่วนของเส้นตรง F_1F_2 มีความยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 1 หน่วย

ข. 2 หน่วย

ค. 3 หน่วย

ง. 6 หน่วย

9. ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องสมการ $\log(x + 1) = 3 \log 2$

และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องสมการ $2^y = \frac{1}{8}$

แล้ว $x + y$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 1

ข. 2

ค. 4

ง. 5





10. ถ้า $\log_a(a + b) + \log_b(a + b) = 0$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

ก. $a + b = 1$

ข. $ab = 1$

ค. $ab(a + b) = 1$

ง. $ab(a + b) + 2 = (a + 1)(b + 1)$

11. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $\arcsin(x + y) + \arccos(x - y) = \pi$

แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

ก. $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

ข. $x^2 + y^2 = 1$

ค. $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$

ง. $x^2 - y^2 = 1$

12. กำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} c + 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ c + 5 \end{bmatrix}$

ถ้า \vec{u} ตั้งฉากกับ \vec{v} แล้ว c เป็นสมาชิกของเซตใดต่อไปนี้

ก. $\{-4, 1\}$

ข. $\{-3, 2\}$

ค. $\{-2, 3\}$

ง. $\{-1, 4\}$





13. ถ้าหาคำให้ $-1 + \sqrt{3}i$ เป็นรากตัวหนึ่งของสมการ $x^5 + 9x^3 - 8x^2 - 72 = 0$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ผลบวกของขนาดของรากทุกตัวมีค่าเท่ากับ 12

(2) ผลบวกของรากทุกตัวเป็นจำนวนจริงบวก

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) เป็นจริง และข้อ (2) เป็นจริง

ข. ข้อ (1) เป็นจริง และข้อ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อ (1) เป็นเท็จ และข้อ (2) เป็นจริง

ง. ข้อ (1) เป็นเท็จ และข้อ (2) เป็นเท็จ

14. ถ้ากำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ และ $A \neq 0$ เมื่อ 0 แทนเมทริกซ์ศูนย์

ถ้า $A^2 - 2A = 0$ แล้ว จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

(2) $\det A$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) เป็นจริง และข้อ (2) เป็นจริง

ข. ข้อ (1) เป็นจริง และข้อ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อ (1) เป็นเท็จ และข้อ (2) เป็นจริง

ง. ข้อ (1) เป็นเท็จ และข้อ (2) เป็นเท็จ

15. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 6 ลูก และลูกบอลสีเขียว 5 ลูก เมื่อสุ่มหยิบลูกบอลออกจากกล่องมา 4 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีเขียวอย่างน้อย 1 ลูก มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{5}{11}$

ข. $\frac{21}{22}$

ค. $\frac{31}{33}$

ง. $\frac{41}{44}$





ตอนที่ ๑ เป็นข้อสอบแบบเติมคำตอบ มี 10 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน รวม 30 คะแนน

16. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $3^x = 2^{x^2}$ และ $B = \{2^x / x \in A\}$

แล้ว ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของเซต B มีค่าเท่ากับเท่าใด

17. กำหนดให้ $A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$

และ $B = \frac{3}{2 \times 4} - \frac{5}{4 \times 6} + \frac{7}{6 \times 8} - \frac{9}{8 \times 10} + \dots$

แล้ว $A + B$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

18. กำหนดให้ \bar{u} , \bar{v} และ \bar{w} เป็นเวกเตอร์

ถ้า $|\bar{u}| = 1$, $|\bar{v}| = 3$, $|\bar{u} + \bar{v}| = 6$ และ $3\bar{u} + 2\bar{v} - \bar{w} = \bar{0}$

แล้ว $|\bar{u} - \bar{v}|$ มีค่าเท่ากับเท่าใด





19. กำหนดให้ (a_n) เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งสอดคล้อง

$$\sum_{n=1}^{100} a_{2n} - \sum_{n=1}^{100} a_{2n-1} = 25 \quad \text{และ} \quad \sum_{n=1}^{100} a_{2n} + \sum_{n=1}^{100} a_{2n-1} = 5375$$

จำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $a_n = 300$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

20. $\triangle ABC$ มีมุม B เท่ากับ 60° และด้าน AB และ BC ยาว 3 และ 5 หน่วย ตามลำดับ
ให้ r เป็นรัศมีของวงกลมแนบใน $\triangle ABC$

ถ้าเขียน $2\sqrt{3}r$ ในรูป $a - \sqrt{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มแล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด



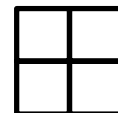


21. ถ้าส่วนเรียงเบงมาตรฐานของข้อมูล 1, 2, 3, . . . , 26 มีค่าเท่ากับ $\frac{a}{b}$ เมื่อ $\frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

22. พี่มีเงินอยู่ 4 บาท และต้องการเล่นเกมกับเพื่อน โดยแต่ละครั้งจะโยนเหรียญที่ยิงตรง 1 เหรียญ และถ้าออกหัว พี่จะได้เงิน 1 บาท แต่ถ้าออกก้อย พี่จะเสียเงิน 1 บาท

ความน่าจะเป็นที่พี่จะมีเงิน 4 บาทเท่าเดิม หลังจากเล่นเกมนี้ไปแล้ว 4 ครั้ง มีค่าเท่ากับเท่าใด

23. ต้องการระบายสีช่อง 4 ช่อง ดังรูป โดยระบายแต่ละช่องด้วยสีหนึ่งสีจาก 4 สี และช่องที่มีด้านร่วมกันต้องมีสีต่างกัน จะระบายสีให้แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี





24. กำหนดฟังก์ชันจุดประสงค์ $P = 3y - x$

$$\text{และอสมการข้อจำกัด} \begin{cases} x + y \geq 10 \\ 4x - y \leq 48 \\ x + 5y \leq 75 \end{cases} \quad \text{โดยที่ } x \text{ และ } y \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

แล้ว P มีค่าสูงสุดเท่ากับเท่าใด

25. ข้อมูลชุดหนึ่งมีมัธยฐานเท่ากับ 2553 และมีฐานนิยมเท่ากับ 2555

นักเรียน 2 คน คำนวณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดนี้ได้เท่ากับ 5

ภายหลัง ครูพบว่านักเรียนทั้งสองคนคำนวณผิดพลาด โดย

นักเรียนคนแรกได้ใช้มัธยฐานแทนค่าเฉลี่ยเลขคณิต

และ นักเรียนคนที่สองได้ใช้ฐานนิยมแทนค่าเฉลี่ยเลขคณิต

จงหาว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่ถูกต้องของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับเท่าใด





ตอนที่สาม เป็นข้อสอบแบบเติมคำตอบ มี 10 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน รวม 40 คะแนน

26. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x^{2553} - x^{2550} + x^5 - x^2 + 4 > 0$

27. กำหนดให้ p, q, r, s, t, u, v และ w เป็นประพจน์

จากการสร้างตารางเพื่อแสดงค่าความจริงของประพจน์

$$[(r \vee (s \vee p)) \wedge ((r \vee s) \vee q)] \vee ((\sim t) \vee u) \vee [(v \rightarrow w) \wedge ((\sim w) \vee v)]$$

พบว่าจะต้องสร้างถึง $2^8 = 256$ กรณี

จงหาว่ามีกี่กรณีที่ประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นจริง





28. จงหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 12x - 13$

เมื่อ x เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 + \frac{4}{x^2} \leq 5$

29. สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ กำหนดให้ (a, b) เป็น ห.ร.ม. ของ a และ b

ถ้า $\mathcal{C} = \{(a^3, b^4) / a \text{ และ } b \text{ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง } (a, b) = 30\}$

แล้ว จำนวนสมาชิกของเซต \mathcal{C} มีค่าเท่ากับเท่าใด





30. ถ้าไฮเพอร์โบล่า $x^2 = b^4 y^2 + 1$ สัมผัสกับพาราโบล่า $y = x^2 + a$
แล้ว $a + 32b^2$ จะมีค่าน้อยสุดที่เป็นไปได้เท่ากับเท่าใด

31. อาณาบริเวณในระนาบ XY ซึ่ง

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \quad \text{และ} \quad \sin(x + 5y) \geq 0$$

มีพื้นที่เท่ากับเท่าใด





32. กำหนดจุด 12 จุดบนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง และลากส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดทุกคู่

ถ้าสุ่มเลือกส่วนของเส้นตรงเหล่านี้มา 4 เส้นแล้ว ความน่าจะเป็นที่ส่วนของเส้นตรงที่สุ่มเลือกมานี้ 3 เส้น

ประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีจุดยอดเป็นจุดในบรรดา 12 จุดที่กำหนดไว้แต่แรก จะมีค่าเท่ากับเท่าใด

(ตอบในรูปเศษส่วนอย่างต่ำ)

33. กำหนด f เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนจริงไปยังเซตของจำนวนจริง โดย

$$f(n) = \begin{cases} 1 & ; n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ 1 + f\left(\frac{n}{2}\right) & ; n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

จงหาว่า $\sum_{n=2010}^{2553} f(n)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด





34. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $z^5 + az^2 + bz + 2553i = 0$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเชิงซ้อน ที่ทำให้สมาชิกทุกตัวของ A มีขนาดเท่ากันหมด

ถ้าค่าสูงสุดของ $\left| \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \right|$ เมื่อ $z_1, z_2, z_3, z_4 \in S$ และ $z_3 \neq z_4$ เท่ากับ $r + \sqrt{s}$ โดยที่ r, s

เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว rs มีค่าเท่ากับเท่าใด

(กำหนดให้ $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$, $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ และ $\tan \frac{\pi}{5} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$)





35. $\int_{\frac{25\pi}{4}}^{\frac{53\pi}{4}} \frac{1}{(1 + 2^{\sin x})(1 + 2^{\cos x})} dx$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

วันที่สิบเอ็ด เดือนหนึ่ง พอสองหน้าห้าสี่

