

คณิตศาสตร์เพชรยอดมงกุฏ

ชิงทุนการศึกษาพระเทพภาวนาวิกรม ครั้งที่ 2

รอบเจียรไนเพชร ช่วงชั้นที่ 3 (มัธยมศึกษาปีที่ 1 – 3)

วันที่ 22 สิงหาคม 2547 เวลา 9.00 – 11.00 น.

1. ข้อสอบฉบับนี้มี 60 ข้อ คะแนนเต็ม 120 คะแนน แบ่งออกเป็น 3 ตอน

ตอนที่ 1 สำหรับทดสอบความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ จำนวน 20 ข้อ

ข้อละ 1 คะแนน รวม 20 คะแนน

ตอนที่ 2 สำหรับทดสอบการนำคณิตศาสตร์ไปใช้ จำนวน 20 ข้อ

ข้อละ 2 คะแนน รวม 40 คะแนน

ตอนที่ 3 สำหรับทดสอบความเป็นเลิศทางคณิตศาสตร์ จำนวน 20 ข้อ

ข้อละ 3 คะแนน รวม 60 คะแนน

2. ให้นักเรียนเขียนเฉพาะคำตอบลงในกระดาษคำตอบที่กำหนดให้เท่านั้น

ตอนที่ 1 สำหรับทดสอบความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ จำนวน 20 ข้อ

ข้อละ 1 คะแนน รวม 20 คะแนน

1. ค่าของ $\frac{350 + 185 - 3^5}{0.0005 \times 10^2}$ เป็นเท่าใด

2. ถ้า $a = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{1 - \frac{3}{1 + \frac{4}{5}}}}$ แล้ว a มีค่าเท่าไร

3. น้ำเชื่อม 2 ชนิด มีน้ำตาลอยู่ 8% และ 4% ต้องนำน้ำเชื่อมชนิดแรกมากี่ลิตร เมื่อรวมกับน้ำเชื่อมชนิดที่สองแล้ว จะได้น้ำเชื่อม 80 ลิตร และมีน้ำตาลอยู่ 5%

4. ถ้า $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ มีค่าเท่ากับ 5,050
แล้ว $100 + 300 + 500 + \dots + 9,900$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

5. เศษของการหาร $(2,547)^{2,547}$ ด้วย 10 เป็นเท่าไร

6. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a \otimes b = b^a$

ค่าของ $\frac{2 \otimes (1 \otimes (2 \otimes 2))}{((1 \otimes 2) \otimes 1) \otimes 2}$ เป็นเท่าไร

7. ภราครมีจำนวนเหรียญห้าบาทและสิบบาทคิดเป็นอัตราส่วน 3 : 5 ถ้าเทมมีให้เหรียญห้าบาทเพิ่มอีก 5 เหรียญ และเหรียญสิบบาทอีก 9 เหรียญแก่ภราคร

ทำให้อัตราส่วนของจำนวนเหรียญห้าบาทต่อเหรียญสิบบาทของภราครเป็น 4 : 7

อยากทราบว่าเดิมภราครมีเงินเหรียญเป็นเงินกี่บาท

8. โคมเป็นพ่อของคอม อายุมากกว่าคอม 25 ปี ดอนเป็นพ่อของโคม อายุมากกว่าโคม 22 ปี

ถ้าอายุของคนทั้งสามรวมกันได้ 108 ปี อยากทราบว่าปู่อายุมากกว่าหลานกี่ปี

9. กำหนดพหุนาม $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 43x + 158$

ถ้าหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $x - 5$ แล้วจะเหลือเศษเท่าใด

10. ถ้า $2134_8 - 1567_8 = abc_8$ แล้ว $a + b + c$ เป็นเท่าไร

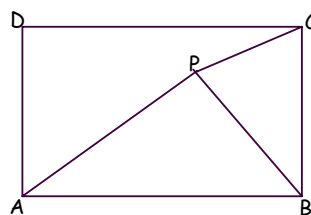
11. จากรูป $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ถ้า $PA = 29$ หน่วย

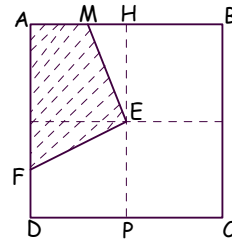
$PB = 25$ หน่วย

$PC = 17$ หน่วย

แล้วรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $ABCD$ มีพื้นที่เท่าไร



12. จากรูป $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีด้านยาวด้านละ 100 เซนติเมตร พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม $AMEF$ เป็นหนึ่งในห้าของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ จงหาความยาวของ \overline{FD}



13. กำหนด y^2 แปรผันโดยตรงกับ x^3 เมื่อ $x = 8$, $y = 32$ แล้ว ถ้า $y = 108$ แล้ว x มีค่าเท่าไร

14. บริษัทแห่งหนึ่งมีพนักงาน 80 คน เงินเดือนเฉลี่ยของพนักงานชายเท่ากับ 15,000 บาท และเงินเดือนเฉลี่ยของพนักงานหญิงเท่ากับ 11,000 บาท ในเดือนหนึ่งต้องจ่ายเงินเดือน 1,040,000 บาท บริษัทนี้มีพนักงานชายกี่คน

15. ถ้า $a - \frac{1}{b} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว $a^2 + b^2$ มีค่าเท่าไร

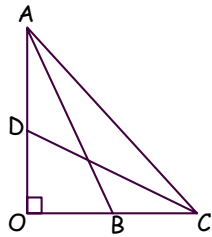
16. กำหนดค่าของ x และ y ในตาราง

x	1	2	3	4	...	10
y	3	5	9	17	...	

ถ้า $x = 10$ แล้ว y มีค่าเท่าไร

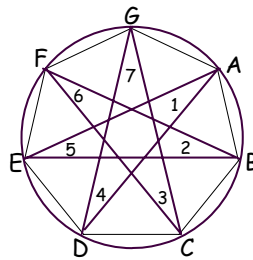
17. โยนเหรียญบาทหนึ่งเหรียญ 99 ครั้ง พบว่าออกหัว 55 ครั้ง ออกก้อย 44 ครั้ง ถ้าโยนเหรียญบาทเพิ่มอีก 1 ครั้ง โอกาสที่เหรียญจะออกก้อยเป็นกึ่งเปอร์เซ็นต์

18.

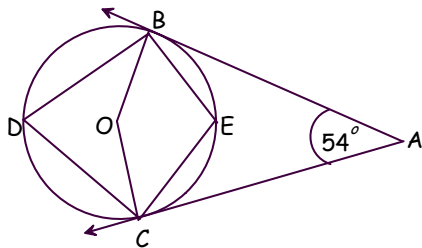


จากรูป $AD = BC$, $AB = 13$ หน่วย
 $OB = 5$ หน่วย, $AO = OC$
 แล้ว \overline{BC} ยาวเท่าไร

19. จากรูป $ABCDEFGG$ เป็น
 รูปเจ็ดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลม
 ค่าของ $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7}$
 เท่ากับกี่องศา



20.



จากรูป \overline{AB} และ \overline{AC} เป็นเส้นสัมผัสวงกลม
 ที่จุด B และ C ตามลำดับ
 $\hat{CAB} = 54^\circ$ แล้ว \hat{BEC} มีขนาดกี่องศา

ตอนที่ 2 สำหรับทดสอบการนำคณิตศาสตร์ไปใช้ จำนวน 20 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน รวม 40 คะแนน

21. ระบบตัวเลขฐานสิบหก คือ 1234_{16} เมื่อแปลงเป็นระบบตัวเลขฐานสอง
 จะประกอบด้วยเลขโดด 1 กี่ตัว

22. กำหนดให้ $\frac{x^2}{x+1} + \frac{3x+3}{x^2} = 4$ ถ้า $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ และ $y < 1$ แล้ว $\frac{1}{y}$ มีค่าเท่าใด

23. ถ้า $A = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ และ $B = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ ค่าของ $A^2 + 5AB + B^2$ มีค่าเท่าใด

24. ถ้า $\frac{7x - 14}{x^2 - x - 12} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x + 3}$ แล้ว $B - A$ มีค่าเท่าไร

25. กำหนด $x^2 + y^2 + z^2 + 2,004w^2 = 4w(x + y + z)$ แล้ว
ค่าของ $(x + 2)(y + 3)(z + 4)(w + 5)$ เป็นเท่าไร

26. จำนวนที่มีสองหลักจำนวนหนึ่ง เลขโดดในหลักสิบ มากกว่าเลขโดดในหลักหน่วยอยู่ 3 และจำนวนนี้น้อยกว่าค่าผลบวกของกำลังสองของเลขโดดในหลักหน่วย และกำลังสองของเลขโดดในหลักสิบอยู่ 4

จงหาผลคูณของเลขโดดทั้งสอง

27. แอนซื้อผ้าไหมมา 38 เมตร และผ้าฝ้าย 23 เมตร เป็นเงิน 9,670 บาท ถ้าเธอขายผ้าไหมได้กำไร 25% และขายผ้าฝ้าย 20% รวมกำไรทั้งหมดเป็นเงิน 2,314 บาท

อยากทราบว่าแอนซื้อผ้าไหมมาราคาเมตรละกี่บาท

28. จะต้องเทสารผสม 40% ออกจากถัง 32 ลิตร เป็นจำนวนกี่ลิตร เมื่อเติมน้ำเข้าแทนที่
ในปริมาณเท่ากัน จึงจะได้สารผสม 25%

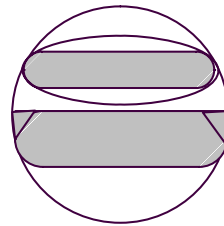
29. ต้นทุนโทรศัพท์มือถือเครื่องหนึ่งราคา 1,990 บาท จะต้องปิดราคาขายไว้เท่าไร เมื่อลดราคา
ให้ผู้ซื้อ 20% แล้วยังได้กำไร 20%

30. ชายคนหนึ่งเดินทางไปยังที่แห่งหนึ่ง ถ้าเขาเดินเร็วขึ้นชั่วโมงละ 1 กิโลเมตร จะถึงปลายทางเร็วขึ้นกว่าปกติ 90 นาที แต่ถ้าเขาลดความเร็วลงชั่วโมงละ $\frac{1}{2}$ กิโลเมตร จะถึงปลายทางช้ากว่าปกติ 60 นาที ถ้าเขาเดินด้วยความเร็วปกติในระยะทางเดินจะใช้เวลาที่ชั่วโมง

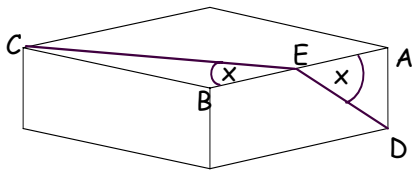
31. ถ้า $ax^2 + bx + 2$ เป็นรากที่สองของพหุนาม $9x^4 - 25x^2 + 28x^2 - 16x + 4$ แล้ว $a^2 + b^2$ มีค่าเท่าใด

32. จุดยอดของพาราโบลาซึ่งมีสมการเป็น $y = 5 + 8x - 2x^2$ อยู่ห่างจากจุดกำเนิดประมาณกี่หน่วย (ตอบเป็นจำนวนเต็มใกล้เคียงที่สุด)

33. ทรงกลมกลวงอันหนึ่งมีรัศมีภายในยาว 15 เซนติเมตร ใส่น้ำในทรงกลมนี้ ดังรูป ถ้าเส้นผ่านศูนย์กลางของพิน้ำยาว 24 เซนติเมตร แล้วระดับน้ำในทรงกลมนี้สูงกี่เซนติเมตร



34.



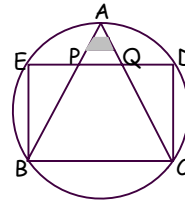
จากรูป A, B, C และ D เป็นจุดยอดมุมของปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง 5 เซนติเมตร ยาว 12 เซนติเมตร สูง 10 เซนติเมตร E เป็นจุดบนด้าน AB ทำให้ $\angle BEC = \angle AED = x$ องศา แล้ว $4 \tan x$ มีค่าเท่าไร

35. กรวยยอดตัดอันหนึ่งหน้าตัดทั้งสองมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 60 เซนติเมตร และ 40 เซนติเมตร ถ้ากรวยยอดตัดอันนี้สูง 42 เซนติเมตร จะมีปริมาตรกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร (กำหนด $\pi = \frac{22}{7}$)

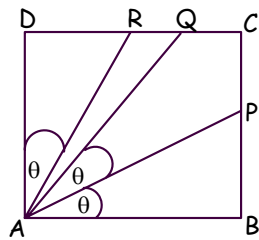
36. เส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ เท่ากับ 12 เซนติเมตร ส่วนสูงที่ลากจาก D ตั้งฉากกับด้าน AB ยาว $\sqrt{3}$ เซนติเมตร

ถ้ามุม A มีขนาด 60 องศา แล้วพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปนี้เท่ากับกี่ตารางเซนติเมตร (กำหนด $\sqrt{3} = 1.732$)

37. จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า $BCDE$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า แนบในวงกลมมีรัศมี $4\sqrt{3}$ หน่วย รูปสามเหลี่ยม APQ มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย

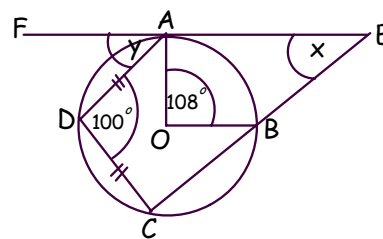


38.



จากรูป $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จุด P และจุด R แบ่งครึ่งด้าน BC และด้าน CD ตามลำดับ ถ้า $AB = 4$ หน่วย แล้วพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ARQ เป็นเท่าไร

39. จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม \overline{EF} สัมผัสวงกลมที่จุด A
 $x + y$ เท่ากับกี่องศา



40. มีสลาก 100 ใบ เขียนหมายเลข 1 ถึง 100 สุ่มหยิบสลาก 1 ใบ
 จงหาโอกาสที่จะหยิบได้สลากหมายเลขที่ 2 หรือ 5 หารลงตัว แต่ 10 หารไม่ลงตัวเท่ากับกี่เปอร์เซ็นต์

ตอนที่ 3 สำหรับทดสอบความเป็นเลิศทางคณิตศาสตร์ จำนวน 20 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน รวม 60 คะแนน

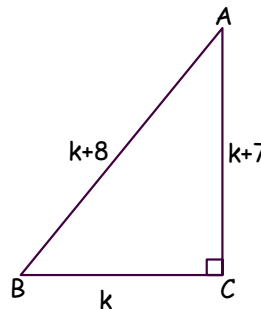
41. ให้ $m = 8^3 \times 3^5 \times 5^4$ มีจำนวนนับที่ไม่ใช่จำนวนเฉพาะกี่จำนวนที่หาร M ลงตัว

42. กำหนดสมการ $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) + 1 = (x^2 - 11x + 29)^2$
แล้ว $a + b + c + d$ เท่ากับเท่าใด เมื่อ $a < b < c < d$

43. ถ้า $(2m)^3 = (3n)^3 = (4w)^3$ และ $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{w} = 1$
แล้วค่าของ $\sqrt[3]{8m^2 + 27n^2 + 64w^2}$ เท่ากับเท่าไร

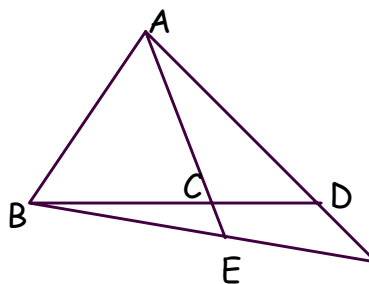
44. กำหนด $a^\otimes = \begin{cases} a - 5 \\ ((a + 9)^\otimes)^\otimes : a < 50 \end{cases}$
แล้ว $1^\otimes + 2^\otimes + 3^\otimes + 4^\otimes$ มีค่าเท่าไร

45. จากรูป ถ้า a, b สอดคล้องกับสมการ
 $x^2 - (k + 21)x + k^2 = 0$
แล้วค่าของ $ab + a + b$ เป็นเท่าไร



46. ถ้า a เป็นผลบวกของคำตอบสมการ $5^{2x} - 6(5^x) = -5$
และ b เป็นคำตอบของสมการ $\sqrt{x + \sqrt{x + 11}} + \sqrt{x - \sqrt{x + 11}} = 4$
ค่าของ $a + b$ เป็นเท่าไร

47. จากรูป กำหนดให้ ABC เป็น
รูปสามเหลี่ยมใดๆ $BC : CD = 5 : 4$
และ $AC : CE = 5 : 6$
ถ้าให้ $AF = mAD$
และ $BF = nBE$
แล้ว $\sqrt{m + n}$ เป็นเท่าไร

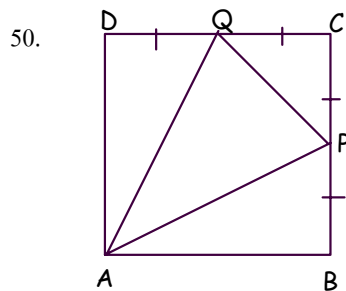


48. กำหนด $\sin 2A = 2\sin A \cos A$ และ $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

ค่าของ $\tan 15^\circ + \tan 22.5^\circ + \cot 15^\circ - \cot 22.5^\circ$ มีเท่ากับเท่าใด

49. แก้วน้ำรูปทรงกระบอกรัศมี 7 เซนติเมตร มีน้ำเต็ม มีพื้นที่ผิวข้าง $\frac{4,162}{7}$ ตารางเซนติเมตร

ถ้าเอียงแก้ว โดยด้านข้างทำมุม 45° กับพื้นราบ จะมีน้ำเหลืออยู่ในแก้วเท่าไร

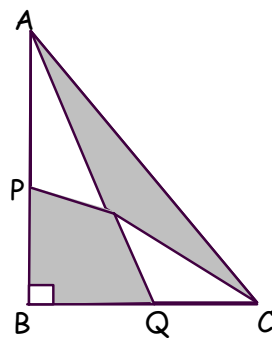


จากรูป $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
ยาวด้านละ 60 หน่วย แล้วพิกัดที่มี
รูปสามเหลี่ยม APQ เป็นฐาน
มีความสูงเท่าไร

51. ทุน 80,000 บาท ดอกหน้ำนำไปลงทุนซื้อเสื้อผ้าสำเร็จรูปมาขายได้กำไร 12% และนำไปลงทุนทำขนมตาลขายได้กำไร 13% เวลาผ่านไป 5 เดือน พบว่าได้กำไรเท่ากัน อยากทราบว่าดอกหน้าลงทุนซื้อเสื้อผ้าสำเร็จรูปมาขายเท่าไร

52. ในการจัดเลี้ยงอาหารเพื่อนร่วมงานได้เตรียมค่าอาหารไว้ 9,000 บาท โดยคาดว่าจะมากันครบ แต่พอถึงเวลาปรากฏว่าติดธุระ 5 คนมาไม่ได้ เมื่อเฉลี่ยกันออกค่าอาหารจะต้องออกเพิ่มคนละ 150 บาท จงหาว่ามีผู้ร่วมงานเลี้ยงกี่คน

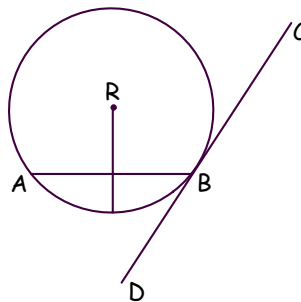
53. จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีพื้นที่ 9 ตารางหน่วย P, Q เป็นจุดแบ่งครึ่งด้าน AB และ BC ตามลำดับ แล้วพื้นที่ส่วนที่แรเงาเป็นเท่าไร



54. รูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดตัดกันของกราฟ ซึ่งมีสมการ $x^2 + y^2 = 145$ และ $xy = 72$ มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย

55. x เท่ากับผลบวกของจำนวนสองจำนวน จำนวนหนึ่งมีค่าคงตัว อีกจำนวนหนึ่ง แปรผันโดยตรงกับ y ถ้า $x = 20$ เมื่อ $y = \frac{1}{3}$ และ $x = 45$ เมื่อ $y = 2$
จงหาค่าต่ำสุดของ x เมื่อ $y \geq 0$

56. \overline{CD} สัมผัสวงกลมซึ่งมี R เป็นจุดศูนย์กลางที่จุด B \overline{RE} แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ \overline{AB} ถ้า $AB = 6\sqrt{3}$ หน่วย และ $RE = 6$ หน่วย มุม ABC มีขนาดกี่องศา



57. เส้นขนาน 2 ชุด ชุดแรกมี 5 เส้น ชุดที่สองมี 4 เส้น ถ้าเส้นขนานทั้ง 2 ชุดนี้ตัดกันทำให้เกิดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
จงหาว่ารูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดขึ้นมีทั้งหมดกี่รูป

58. ถ้า โอกาสที่ นาย ก จะได้เหรียญทอง เท่ากับ 0.5
โอกาสที่ นาย ก จะได้เหรียญเงิน เท่ากับ 0.3
โอกาสที่ นาย ก จะได้เหรียญทองหรือเหรียญเงิน เท่ากับ 0.7
โอกาสที่ นาย ก ไม่ได้เหรียญทองและเหรียญเงินเป็นกี่ปอร์เซ็นต์

59. นักเรียนชั้นหนึ่งเป็นชาย 60 คน หญิง 40 คน ค่าเฉลี่ยอายุเฉลี่ยของนักเรียนชายได้ 15.2 ปี อายุเฉลี่ยของนักเรียนหญิงได้ 14.5 ปี แต่มีนักเรียน 2 คน บอกรายอายุเกินไป 1 ปี อีก 2 คน บอกรายอายุต่ำไป 2 ปี อายุเฉลี่ยที่แท้จริงของนักเรียนชั้นนี้เป็นกี่ปี (ตอบเป็นทศนิยม)

60. ข้อมูลชุดหนึ่งเป็นจำนวนเต็ม 5 จำนวน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน ฐานนิยม และพิสัยเป็น 18 เท่ากัน ข้อมูลชุดนี้เป็นไปได้ทั้งหมดกี่แบบ