



# ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์เพชรยอดมงกุฏ

## ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ครั้งที่ 7

วันอาทิตย์ที่ 23 สิงหาคม 2552 เวลา 9.00-11.00 น. โรงเรียนวัดสุทัศนวิหาราม

1. กำหนด  $S = \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$

ค่าของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก.  $n + \frac{n}{2n+1}$

ข.  $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

ค.  $1 + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

ง.  $1 - \frac{1}{2n+1}$

2. กำหนด  $F(x) = (1 - x + x^2 - \dots - x^{99} + x^{100})(1 + x + x^2 + \dots + x^{99} + x^{100})$

ค่าของ F(x) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก.  $\frac{1 - x^{200}}{1 - x^2}$

ข.  $\frac{1 - x^{202}}{1 + x^2}$

ค.  $1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{198} + x^{200}$

ง.  $1 - x^2 + x^4 - \dots - x^{198} + x^{200}$

3. กำหนด  $S = \frac{1}{1} \binom{n}{0} + \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \frac{1}{3} \binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n}$

ค่าของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก.  $\frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

ข.  $\frac{2^{n+1} + 1}{n+1}$

ค.  $2^{n+1} + 1$

ง.  $2^{n+1} - 1$







๗. ผลเฉลยทั้งหมดของสมการ  $x^3 + 1 = 2 \cdot \sqrt[3]{2x - 1}$  คือค่าในข้อใดต่อไปนี้

- ก. 1
- ข.  $1, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$
- ค.  $1, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$
- ง.  $1, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

๘. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

- (1)  $\frac{a + b}{1 + a + b} < \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b}$  ทุกจำนวนจริงบวก  $a$  และ  $b$
- (2)  $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$  ทุกจำนวนจริง  $x$
- (3)  $\frac{(1 + a)(1 + b)}{2 + a + b} < \frac{1 + a + b}{2}$  ทุกจำนวนจริง  $a$  และ  $b$

ข้อสรุปใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อ (1) และ (3) สรุปถูกต้อง
- ข. ข้อ (2) และ (3) สรุปถูกต้อง
- ค. ข้อ (1) และ (2) สรุปถูกต้อง
- ง. ข้อ (1), (2) และ (3) สรุปถูกต้อง

๙. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

- (1)  $(2n + 1)^n > (2n)^n + (2n - 1)^n$  ทุกจำนวนเต็มบวก  $n \geq 3$
- (2)  $x^6 + 2 \geq x^4 + 2x$  ทุกจำนวนจริง  $x$

ข้อสรุปใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อ (1) และ (2) สรุปถูกต้อง
- ข. ข้อ (1) และ (2) สรุปไม่ถูกต้อง
- ค. ข้อ (1) สรุปถูกต้อง และ (2) สรุปไม่ถูกต้อง
- ง. ข้อ (1) สรุปไม่ถูกต้อง และ (2) สรุปถูกต้อง





10. จำนวนของ  $(a, b)$  ซึ่ง  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนเต็มที่สุดคค้องสมการ

$$a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 + 1 = 2002$$

เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- |      |      |
|------|------|
| ก. 0 | ข. 1 |
| ค. 2 | ง. 3 |

11. กำหนด  $N = P_1P_2P_3$  โดยที่  $P_1, P_2$  และ  $P_3$  เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน

ถ้า  $\sum_{d|N} d = 3N$  แล้ว ค่าของ  $\sum_{d|N} \frac{1}{d}$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- |                  |                   |
|------------------|-------------------|
| ก. $\frac{1}{3}$ | ข. $\frac{1}{3N}$ |
| ค. 3             | ง. $3N$           |

12. กำหนด  $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$  เมื่อ  $2^n - 1$  เป็นจำนวนเฉพาะ

และกำหนดให้  $1 < d_1 < d_2 < d_3 < \dots < d_k = N$  เป็นตัวหารที่เป็นบวกทั้งหมดของ  $N$

ค่าของ  $1 + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + \dots + \frac{1}{d_k}$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- |                  |        |
|------------------|--------|
| ก. $\frac{1}{2}$ | ข. 2   |
| ค. $\frac{1}{N}$ | ง. $N$ |





13. ผลบวกของเลขโดดทั้งหมดที่ใช้ในการเขียนแทนจำนวน  $10^{999} - 999$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 8964

ข. 8965

ค. 8967

ง. 8968

14. มีจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 567 ทั้งสิ้นกี่จำนวนที่มี 3 หรือ 5 เป็นตัวประกอบ

ก. 113

ข. 189

ค. 265

ง. 302

15. มีจำนวนเต็มตั้งแต่ 999 ถึง 9999 รวมทั้งสิ้นกี่จำนวน ที่ขึ้นต้น หรือลงท้ายด้วย 3

ก. 900

ข. 1000

ค. 1800

ง. 1900





16. ผลเฉลยของระบบสมการ

$$x(y + z) = 44$$

$$y(z + x) = 50$$

$$z(x + y) = 54$$

สอดคล้องกับข้อใดต่อไปนี้

ก.  $x = \pm 4, y = \pm 5, z = \pm 6$

ข.  $x = \pm 5, y = \pm 4, z = \pm 6$

ค.  $x = \pm 5, y = \pm 6, z = \pm 4$

ง.  $x = \pm 6, y = \pm 5, z = \pm 4$

17. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า  $a^2 - b^2$  เป็นจำนวนเฉพาะแล้ว  $a^2 - b^2 = a + b$

(2) 4 หาร  $m^2 + 2$  ไม้ลงตัว ทุกจำนวนเต็ม  $m$

ข้อสรุปใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) และ (2) สรุปถูกต้อง

ข. ข้อ (1) และ (2) สรุปไม่ถูกต้อง

ค. ข้อ (1) สรุปถูกต้อง และ (2) สรุปไม่ถูกต้อง

ง. ข้อ (1) สรุปไม่ถูกต้อง และ (2) สรุปถูกต้อง

18. ผลลัพธ์ของ  $1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + 99^5$  คือข้อใดต่อไปนี้

ก. 0

ข. 2

ค. 3

ง. 9





19. ผลลัพธ์ของ  $1! + 2! + 3! + \dots + 2009!$  คือข้อใดต่อไปนี้

ก. 0

ข. 1

ค. 3

ง. 9

20. กำหนด  $x^5 - x^3 + x = a$  ข้อสรุปใดต่อไปนี้เป็นจริง

ก.  $x^6 \geq 2a + 1$

ข.  $x^6 \geq 2a$

ค.  $x^6 \geq 2a - 1$

ง.  $x^6 \geq 2a - 2$

21. ให้  $C$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่กำหนดดังรูป

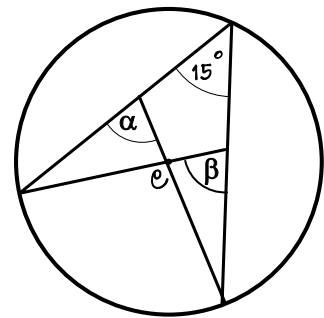
ค่าของ  $\sin(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta) + 2\cot(\alpha + \beta)$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0

ข. 2

ค.  $\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$

ง.  $\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)$





22. ค่าของ  $\sqrt{19 + 4\sqrt{21}} - \sqrt{29 - 2\sqrt{28}} + \sqrt{7} - \sqrt{12}$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก.  $-\sqrt{7}$

ข.  $-1$

ค.  $1$

ง.  $2\sqrt{7}$

23. เศษเหลือที่ได้จากการหารพหุนาม  $x + 5x^2 - 3x^4 + 4x^8 + x^{16} - x^{32}$  ด้วยพหุนาม  $x^2 - 1$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก.  $0$

ข.  $6x$

ค.  $x + 6$

ง.  $-x + 6$

24. ผลบวกของสัมประสิทธิ์ของพหุนามที่ได้จากการกระจายผลคูณของพหุนาม  $(3x^2 - 2x - 2)^{2553}$  และ  $(2x^2 - 3x + 2)^{2010}$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก.  $-4$

ข.  $-1$

ค.  $1$

ง.  $(2 \times 2553) + (2 \times 2010)$







28. กำหนดวงกลมรัศมี 1 หน่วย สี่วงสัมผัสกันที่จุด A, B, C และ D

ให้วงกลมอีกรวงหนึ่งรัศมีน้อยกว่า 1 สัมผัสวงกลมทั้งสี่วงนี้ที่จุด E, F, G และ H ดังรูป

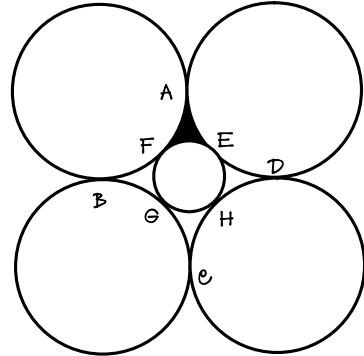
พื้นที่ของบริเวณที่แรเงาเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก.  $2\sqrt{2}\pi$

ข.  $\frac{\pi}{4}(3 - 2\sqrt{2})$

ค.  $1 - \pi + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

ง.  $1 + \pi - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$



29. พิจารณาแบบรูปของจำนวนต่อไปนี้

พจน์ที่ 1            3 + 6

พจน์ที่ 2            3 + 6 + 9

พจน์ที่ 3            3 + 6 + 9 + 12

...

พจน์ที่ 150 ของแบบรูปข้างต้นเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 33522

ข. 33525

ค. 33975

ง. 34428

30. กำหนด  $a^{4x} = 3 - 2\sqrt{2}$  และ  $a^{-4x} = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$

ค่าของ  $\frac{a^{6x} + a^{-6x}}{a^{2x} + a^{-2x}}$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก.  $4\sqrt{2}$

ข. 6

ค. 5

ง.  $2\sqrt{2}$





31. กำหนด  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนที่สอดคล้องระบบสมการ

$$x + y + \sqrt{x + y} = 132$$

$$x - y - \sqrt{x - y} = 56$$

ค่าของ  $\sqrt{x^2 - y^2}$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 96

ข. 88

ค. 84

ง. 77

32. กำหนด  $P(x) = x^{2553} + a_{2552}x^{2552} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

ถ้า  $P(1) = P(2) = P(3) = \dots = P(2553) = 0$  แล้ว ค่าของ  $P(0)$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก.  $1277 \cdot 2553$

ข.  $2553?$

ค.  $-2553?$

ง.  $-2552?$

33. กำหนด  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับสมการ  $x^2 + y^2 + 6y = 4$

จำนวนคำตอบ  $(x, y)$  ของสมการข้างต้นเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 8 คำตอบ

ข. 4 คำตอบ

ค. 2 คำตอบ

ง. ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนเต็ม





34. กำหนด  $a$  เป็นเศษที่ได้จากการหาร  $100 \cdot 1! + 99 \cdot 2! + 98 \cdot 3! + \dots + 1 \cdot 100!$  ด้วย 5

และ  $b$  เป็นเศษที่ได้จากการหาร  $2^{24}$  ด้วย 17

ค่าของ  $a^2 + b^2$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 15

ข. 17

ค. 19

ง. 165

35. กำหนด  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

ถ้ากราฟของพาราโบลา  $y = (n^2 + n)x^2 - (2n + 1)x + 1$  ตัดแกน  $x$  ที่จุด  $(a_n, 0)$  และ  $(b_n, 0)$

แล้ว ค่าของ  $\sum_{n=1}^{2010} a_n b_n$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก.  $\frac{1005}{2011}$

ข.  $\frac{2010}{2011}$

ค.  $\frac{2004}{2010}$

ง.  $\frac{2009}{2010}$

36. กำหนด  $a = \sqrt{3} + \frac{4 - 2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}}$  ค่าของ  $a^6 + a^3 + 1$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. -3

ข. -1

ค. 1

ง. 3





37. กำหนดระบบสมการ  $x + y - z = 8$ ,  $y^2 + z^2 - x^2 = 28$ ,  $yz = 6$

ค่าของ  $x$  ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ระบบสมการเป็นจริง คือข้อใดต่อไปนี้

ก. -1

ข. 1

ค. 3

ง. 6

38. ความต้านทานของลวดไฟฟ้าเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความยาว และเป็นสัดส่วนผกผันกับกำลังสองของเส้นผ่าศูนย์กลาง อัตราส่วนของความต้านทานของลวดสองเส้นที่ทำด้วยโลหะชนิดเดียวกัน โดยเส้นแรกมีเส้นผ่าศูนย์กลาง 2.5 มิลลิเมตร ยาว 6 เมตร และเส้นที่สองมีเส้นผ่าศูนย์กลาง 3.5 มิลลิเมตร ยาว 9 เมตร เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 7 : 5

ข. 98 : 75

ค. 3 : 2

ง. 98 : 73

39. กำหนด  $a$  เป็นคำตอบของสมการ  $\sqrt{4x^2 - 7x - 15} - \sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{x^2 - 9}$

ค่าของ  $\frac{a-1}{a+1}$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก.  $\frac{1}{2}$

ข. 2

ค.  $\frac{1}{3}$

ง. 3





40. กำหนดสมการ  $x^3 - ax^2 + 52x - b = 0$  ถ้าคำตอบทุกค่าของสมการเป็นจำนวนจริงบวกที่แตกต่างกัน โดยคำตอบตัวหนึ่งเป็นสามเท่าของอีกคำตอบหนึ่ง ในขณะที่คำตอบตัวที่สามเป็น 5

ค่าของ  $a + b$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 13

ข. 60

ค. 63

ง. 73

วันที่สาม เดือนแปด พอสองหน้าห้าสาม

