

โรงเรียนสตรีวิทยา ๒
Chaiya Mathematical Olympiad

ชื่อ.....

ระดับชั้น ม.6

เลขประจำตัว.....

วันอังคารที่ 9 มกราคม 2550

สถานที่สอบ.....

เวลา 8.30 – 11.00 น.

ห้องสอบ.....

ผู้ออกข้อสอบ นาย ชัยยะ เรียบเลิศหิรัญ

คำอธิบาย

- ข้อสอบชุดนี้เป็นข้อสอบ Chaiya Mathematical Olympiad รอบชิงชนะเลิศ
- ก่อนตอบคำถาม จงเขียนชื่อ เลขประจำตัว เลขที่นั่งสอบ ลงในกระดาษคำตอบ
- ข้อสอบมี 7 หน้า แบ่งเป็น

Advance Mathematical Exam

เติมคำตอบ 10 ข้อ 30 คะแนน (หน้า 2 – 3)

เติมคำตอบ 10 ข้อ 40 คะแนน (หน้า 3 – 4)

เติมคำตอบ 10 ข้อ 50 คะแนน (หน้า 4 – 5)

รวม 30 ข้อ 120 คะแนน

Entire Mathematical Exam

แสดงวิธีทำ 5 ข้อ 60 คะแนน (หน้า 6 – 7)

รวม 5 ข้อ 60 คะแนน

- หลังจากผู้สอบส่งกระดาษคำตอบให้กรรมการคุมสอบแล้ว อนุญาตให้นำข้อสอบออกจากห้องสอบได้
- ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณทุกชนิด
- ไม่อนุญาตให้ผู้เข้าสอบออกจากห้องสอบก่อนเวลา 9.30 น.
- ผลสอบติดประกาศที่ห้องคณิตศาสตร์ วันศุกร์ที่ 12 มกราคม 2550



PART Advance Mathematical Exam

ตอนที่ 1 จงเติมคำตอบที่ถูกต้องที่สุดลงในช่องว่างที่กำหนดให้ (ข้อละ 3 คะแนน)

1. ผลในข้อใดบ้างที่ทำให้ การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล

เหตุ 1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

2. $\sim r \vee s$

3. $\sim s \wedge q$

ก) $\sim p \rightarrow q$

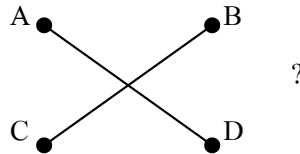
ข) $p \rightarrow \sim q$

2. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มใดๆ และ $p(x) = x^3 + ax^2 - bx + 5$

ถ้า $x - 2$ หาร $p(x)$ เหลือเศษเท่ากับ 15

แล้วตัวหารร่วมมากของ a และ b มีค่าเท่ากับเท่าใด ?

3. จงหาจำนวนสับกราฟทั้งหมดของ



4. จงหาพื้นที่สี่เหลี่ยมปิดล้อมด้วยเส้นตรง ?

$$L_1; 3x - 4y - 17 = 0, L_2; 4x + 3y + 12 = 0, L_3; 3x - 4y + 13 = 0, L_4; 4x + 3y - 13 = 0$$

5. ให้ f เป็นเส้นโค้งที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันเท่ากับ $6x - 2$ และมีจุดสูงสุด

สัมผัส คือ $(0, 2)$ ถ้า f มีจุดต่ำสุดสัมผัส แล้ว จะเกิดที่จุดใด ?

6. ให้ $A = 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \dots + 2549(2549!)$?

และ $B = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{2549}{2550!}$ แล้วค่าของ $\frac{A}{B}$ มีค่าเท่าใด (ตอบในรูปแฟกทอเรียล)

7. ให้ r และ s เป็นฟังก์ชันบน $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\text{โดย } r - s = \{(1,1), (4,5), (5,2)\} \text{ และ } s^{-1} \cap r^{-1} = \{(3,2), (4,3)\}$$

ถ้า $r \circ r = \{(1,a), (2,b), (3,c), (4,d), (5,e)\}$ แล้วจงเรียงลำดับค่าของ a, b, c, d, e ?



8. พหุนาม $p(x) = x^3 + ax + b$ โดย $a, b \in R$
ถ้าจำนวนเชิงซ้อน $1-i$ เป็นคำตอบของสมการ $p(x) = 0$
แล้ว $a^2 + b^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด ?
9. เมื่อการกระจาย $(1 - 6x + 12x^2 - 8x^3)^9$ แล้วสัมประสิทธิ์ของพจน์ x^{12} มีค่าเป็นกี่เท่าของ
สัมประสิทธิ์ของพจน์ x^{15} ?
10. กำหนดให้ A, B, C เป็นตัวกลางเรขาคณิต 3 พจน์ระหว่าง p และ q
โดยมีอัตราส่วนร่วมเป็นบวก
แล้วค่าของ $\log_A pB + \log_B AC + \log_C qB$ มีค่าเท่ากับเท่าใด ?

ตอนที่ 2 จงเติมคำตอบที่ถูกต้องที่สุดลงในช่องว่างที่กำหนดให้ (ข้อละ 4 คะแนน)

11. ให้ $n(A \times (B - A)) = 144$ และ $n((A - B) \times B) = 119$
จงหาจำนวนสมาชิกของ $(A \cup B) - (A \cap B)$?
12. เซตคำตอบของสมการ $1 \leq \left| \frac{x^2 - 6}{x} \right| \leq 5$ เท่ากับเท่าใด ?
13. ให้ $\frac{1}{1 + \sec x} + \frac{1}{1 + \cot x} + \frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 + \tan x} = \sec x + \tan x$
แล้วค่าของ $\operatorname{cosec} x + \cot x$ มีค่าเท่ากับเท่าใด ?
14. ให้ $f(x) = f(x-1) + x + 1$
ถ้า $f(0) = 0$ แล้ว $\frac{1}{2549} f(2549)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด ?
15. ให้ข้อมูล คือ 11, 13, 13, 17, 15, 16, 17, 11, 13
ถ้าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ k ทำให้ $\sum_{i=1}^n (x_i - P_k)^2$ มีค่าน้อยที่สุด และ x_i เป็นข้อมูลใดๆ
แล้วค่าของ k เท่ากับเท่าใด ?
16. ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} \left[\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}} - \sqrt{x + \sqrt{1-x^2}} \right]$ เท่ากับเท่าใด ?



17. ให้วงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$ และ จุด $P(8,6)$ เป็นจุดภายนอกวงกลม ถ้าจุด A และ B เป็นจุดบนวงกลมที่อยู่ใกล้และไกลจุด P มากที่สุด แล้ว พื้นที่สามเหลี่ยม AOB มีพื้นที่เท่าใด กำหนด O แทนจุดกำเนิด

18. กำหนดให้ $f(x) = \frac{2^x}{2^x + 2^{1-x}}$ จงหาค่าของ $\sum_{k=1}^{2550} f\left(\frac{k}{2551}\right)$?

19. ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ที่มี $\det(2A) = 32$

แล้ว ค่าของ $a_{11}C_{21}(A) + a_{12}C_{22}(A) + a_{13}C_{23}(A) + a_{14}C_{24}(A)$ กับ $\det(\text{Adj } A)$ มีค่าต่างกันเท่าใด ?

20. ถ้า $p(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ค่าหนึ่ง คือ -1 และ $p'(x) = x^3 p(x) + 8$ แล้ว $p''(2)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด ?

ตอนที่ 3 จงเติมคำตอบที่ถูกที่สุดลงในช่องว่างที่กำหนดให้ (ข้อละ 5 คะแนน)

21. ให้ x_i แทนข้อมูลใดๆในข้อมูล n จำนวน และ z_i แทนค่ามาตรฐานของข้อมูล x_i
 ถ้า $\sum_{i=1}^n x_i = 60, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 2028$ และ สัมประสิทธิ์การแปรผันของข้อมูลชุดนี้คือ 2.4
 แล้ว $\sum_{i=1}^n z_i(z_i + 1)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด ?

22. ให้ A เป็นเมตริกซ์ซึ่ง $\text{Adj}(\text{Adj}(A)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

แล้วผลบวกของสมาชิกใน A คือเท่าใด ?

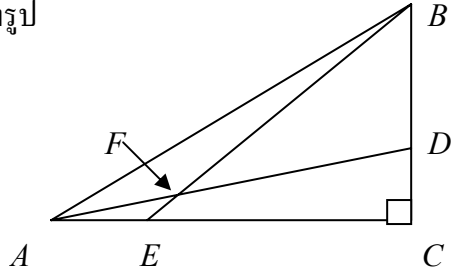
23. ให้ z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกันทั้งหมด ซึ่ง

$$z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2 = z_2^2 + z_2 z_3 + z_3^2 = z_3^2 + z_3 z_1 + z_1^2 = 0$$

แล้วค่าของ $\frac{z_1 + z_2}{z_3} + \frac{z_2 + z_3}{z_1} + \frac{z_3 + z_1}{z_2}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (ตอบในรูป $a + bi$) ?



24. พิจารณารูป



ให้ $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ และ $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ โดย $\overrightarrow{AD} = \vec{u} - \frac{2}{5}\vec{v}$ และ $\overrightarrow{BE} = \vec{v} - \frac{7}{10}\vec{u}$

ถ้า $\overrightarrow{CF} = k\vec{u} + m\vec{v}$ แล้ว $k + m$ มีค่าเท่ากับเท่าใด ?

25. กำหนด A เป็นเมทริกซ์ 2×2 ที่มีสมบัติว่า $\det((AdjA) - xI) = x^2 - 6x + 1$
แล้ว $\det(A - 4A^{-1})$ มีค่าเท่ากับเท่าใด?

26. ให้ a, b เป็นค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $f(x) = (\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3$
แล้วค่าของ $\frac{b}{a}$ คือเท่าใด ?

27. ข้อมูล 6 จำนวน มีมัธยฐาน ค่ากึ่งกลางพิสัย และ ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ เท่ากับ 15, 13
และ 2.25 ถ้าในนี้มีข้อมูล 3 จำนวนซึ่งมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 0 และ 3 จำนวน
ดังกล่าวมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 16 จงหาข้อมูลทั้ง 6 ข้อมูลนี้เรียงจากน้อยไปมาก ?

28. ให้ a, b เป็นคำตอบของสมการ $3\log_{2x} 6 + \log_{18} 3x = 3$ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด ?

29. มีตัวอักษร $a, a, a, b, b, b, c, c, c$ นำมาเรียงทั้งหมดเป็นเส้นตรง จะมีกี่วิธีซึ่งเมื่ออ่านจากซ้าย
ไปขวา จะพบ a อย่างน้อยหนึ่งตัวก่อนจะพบ b และ จะพบ b อย่างน้อยหนึ่งตัวก่อนจะพบ
 c เสมอ ?

30. ถ้าคน 10 คน (นับรวม A, B, C, D แล้ว) นำมาจัดเรียงเป็น โดยมีข้อแม้ว่า
“ระหว่าง A และ B จะต้อง มี C อยู่ และ ทางขวาของ C จะต้อง มี D อยู่”
แล้วการจัดเรียงดังกล่าวแบบเส้นตรงจะเป็นกี่ท่าของการจัดเรียงดังกล่าวแบบวงกลม ?

CRI



PART Entire Mathematical Exam

จงแสดงวิธีทำต่อไปนี้

(ข้อละ 10 คะแนน)

1. ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่ $\det(A) = -1$ และ $A + I_{3 \times 3}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

โดย $I_{3 \times 3}$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3 และกำหนด $B = \sum_{i=1}^{2549} A^i$

1.1 จงพิสูจน์ว่า $A - I_{3 \times 3}$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (4 คะแนน)

1.2 จงหาเมทริกซ์ B และ B^{-1} (8 คะแนน)

2. กำหนด $L_1; (2 + \sqrt{3})x + y = 2(\sqrt{3} + 1)$

$L_2; (2 - \sqrt{3})x + y = 2$

และ $L_3; x - y = \sqrt{3} + 1$

ตัดกันที่เป็นรูปสามเหลี่ยม PQR

2.1 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม PQR (6 คะแนน)

2.2 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมที่แนบในรูปสามเหลี่ยม PQR (6 คะแนน)

3. ให้ $a_n = (1)(2) + (2)(3) + (3)(4) + \dots + (n)(n+1)$

และ $b_n = (1)(2)(3) + (2)(3)(4) + (3)(4)(5) + \dots + (n)(n+1)(n+2)$

จงแสดงวิธีหา $\sum_{n=1}^{1997} \frac{b_n}{a_n}$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{na_n}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด? (12 คะแนน)

4. 4.1 กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$

แล้วพื้นที่ใต้โค้งระหว่าง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ บนช่วง $[a, b]$ สามารถเขียนอยู่

ในรูปอินทิกรัลจำกัดเขตได้อย่างไร (2 คะแนน)

4.2 จากข้อ 4.1) จงหา $\int_{-2}^{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{16-x^2} + \sqrt{8-x^2}} dx$

(ตอบทศนิยม 2 ตำแหน่ง) (10 คะแนน)



5. 5.1 จงกระจาย $(x + y)^{2n}$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม (2 คะแนน)

5.2 จงหาค่าของ $(\cos \theta + i \sin \theta)^{2n}$ (2 คะแนน)

5.3 จงนำผลที่ได้ในข้อ 5.1) และ 5.2) พิสูจน์ว่า

$$\binom{2n}{1} - \binom{2n}{3} + \binom{2n}{5} - \binom{2n}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \binom{2n}{2n-1} = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

(8 คะแนน)

CRT

