



## ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์เพชรยอดมงกุฏ มัธยมศึกษาตอนปลาย ครั้งที่ 3 รอบชิงชนะเลิศ

1. กำหนด  $5^{x+1} + 5^{x+2} = 3,775 - 5^{x-1}$  และ  $5^{-1} \cdot a^{x^2} = \frac{1}{5,000,000,000}$

จงหาค่าของ  $a$

2. 
$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & ; x \geq 4 \\ f(x+1) & ; x < 4 \end{cases}$$

จงหาค่าของ  $f(\log_2 3 + 3)$

3. ให้  $k$  เป็นคำตอบของสมการ  $\frac{\sqrt[4]{16}}{4\sqrt{x+0.25}} = \frac{3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}}{100}$  และ  $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

แล้ว  $\det(kB)^3$  มีค่าเท่าไร

4. กำหนด  $Z_1 = i + \frac{1}{999}$  และ  $Z_{n+1} = \frac{Z_n + i}{Z_n - i}$  ;  $n \geq 1$

ถ้า  $Z_{2005} = a + bi$  เมื่อ  $a, b$  เป็นจำนวนจริง แล้ว  $\frac{b}{a}$  มีค่าเท่าไร

5. จำนวนเต็มบวก  $p$  ทหาร 3083, 3295 และ 3666 เหลือเศษเท่ากัน คือ  $r$   
ผลคูณของ  $p$  และ  $r$  มีค่าเท่าใด

6. จงหาจำนวนเต็ม  $n$  ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้  $\sqrt{n + \sqrt{1966}} - \sqrt{n - 1}$  เป็นจำนวนเต็มบวก

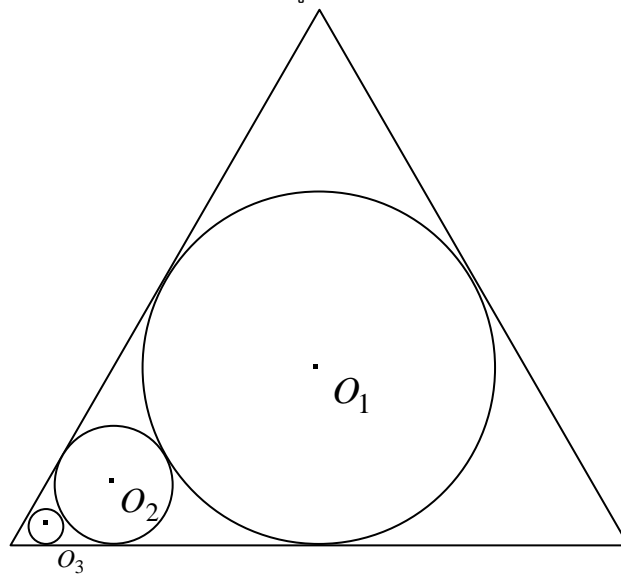




7. ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันซึ่งอนุพันธ์ของ  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด  $[0, 1]$  และ  $g(x) = \frac{f(x)}{x^4 + 1}$

ถ้า  $f(1) = f'(1) = 1$  และ  $f(0) = f'(0) = -2$  แล้ว  $\int_0^1 g''(x) dx$  มีค่าเท่าไร

8. กำหนดรูปให้  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ขาวด้านละ 12 นิ้ว  
 วงกลม  $O_1$  แนบในรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  พอดี และสัมผัสด้านทั้ง 3 ด้าน  
 วงกลม  $O_2$  สัมผัสวงกลม  $O_1$  และด้าน  $AB$  กับด้าน  $BC$   
 วงกลม  $O_3$  สัมผัสวงกลม  $O_2$  และด้าน  $AB$  กับด้าน  $BC$   
 จงหา ผลบวกของพื้นที่วงกลมทั้งสามวง (ตอบในรูป  $\pi$ )



9. กำหนดสามพจน์แรกของการกระจาย  $(x + y)^n$  คือ 16, 160 และ 600  
 จงหาพจน์ที่สี่ที่ได้จากการกระจายทวินามนี้

10. ให้  $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$  และ  $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

จงหาค่าของ  $A^3 + B^3$





11. ให้  $f$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชัน กำหนดโดย  $f(x) = 2x + 1$  และ  $f((f + g)(x)) = x^2 + 2x + 4$   
 จงหาค่าของ  $((g \circ f) \cdot f^{-1})(x)$

12. ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย  $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

ถ้า  $\sin \theta = f(\sqrt{2} - 1)$  เมื่อ  $\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{3\pi}{2}$

จงหาค่าของ  $\theta$

13. กำหนดให้  $\frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{1}{3}$  สำหรับ  $x$  บางค่า  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

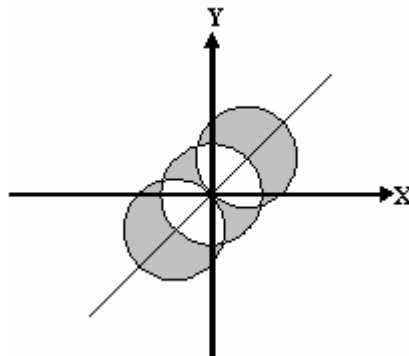
จงหาค่าของ  $\frac{\sin 3x}{\sin x}$

14. วงกลมสามวง มีสมการเป็น  $C_1: x^2 + y^2 = 32$

$$C_2: x^2 + y^2 + 8x + 8y = 0$$

$$\text{และ } C_3: x^2 + y^2 - 8x - 8y = 0$$

จงหา พื้นที่วงกลมส่วนที่ไม่ซ้อนกันเลย (ส่วนที่แรเงาดังรูป)



15. กำหนด  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $A = B - C$ ,  $B = -B^t$  และ  $C = C^t$

ถ้า  $BC = D^t$  แล้ว  $\det C + \det D$  มีค่าเท่าไร





16. ถ้า  $\frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 44^\circ}{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \sin 3^\circ + \dots + \sin 44^\circ} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$  เมื่อ  $a + b$  เป็นจำนวนเต็ม

แล้ว  $a + b$  มีค่าเท่าไร

17. กำหนด  $a, b, c$  เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และ  $m \neq 1$  เป็นจำนวนจริง ที่ทำให้

$$\log_a m = \frac{1}{5}(\log_b m + \log_c m)$$

แล้ว  $\frac{\log_b a + \log_c a}{5\log_a b - \log_c b}$  มีค่าเท่าไร

18. จากการสำรวจนักเรียน ม.6 ในการเลือกเรียนวิชาเพิ่มเติม พบว่า

ถ้าเลือกเรียนคณิตศาสตร์แล้ว ต้องไม่เลือกเรียนภาษาไทย

ถ้าเลือกเรียนภาษาไทยแล้ว ต้องไม่เลือกเรียนภาษาอังกฤษ

และ ถ้าเลือกเรียนภาษาอังกฤษแล้ว ต้องไม่เลือกเรียนคณิตศาสตร์

โดยที่ 84 คนไม่เลือกเรียนคณิตศาสตร์

76 คนไม่เลือกเรียนภาษาไทย

80 คนไม่เลือกเรียนภาษาอังกฤษ

60 คนเลือกเรียนคณิตศาสตร์ หรือภาษาอังกฤษ

ลุ่มนักเรียนมา 1 คน ความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนที่เลือกเรียนคณิตศาสตร์เป็นเท่าไร

19. ให้  $f(x) = x + 1$  ,  $g(x) = \sqrt{x}$  และ  $F(x) = (f \circ g)(x)$  เมื่อ  $x \geq 1$

จงหาค่าของ  $(F^{-1})'(2)$

20. สร้างจำนวนที่มี 4 หลัก โดยใช้เลขโดด 5 ถึง 9

จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้จำนวนที่มีผลรวมของเลขโดดในแต่ละหลักเป็น 30

21. จงหา จำนวนเต็มบวก  $a$  ที่มีค่าน้อยที่สุดซึ่งทำให้  $5n^{13} + 13n^5 + 9an$  หารด้วย 65 ลงตัว

ทุกค่าของจำนวนเต็ม  $n \geq 1$





22. กำหนดให้  $\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \dots + \frac{n}{z^n} + \dots = A$

จงหาค่า  $\left(A + \frac{1}{9}\right)i$  เมื่อ  $z = 1 - 3i$

23. ครูโรงเรียนเพชรมงกุฎ 120 คน มีอายุรวมกันเป็น 3,000 ปี ความแปรปรวนของอายุครูทั้งหมดเท่ากับ  $6.25$  ปี<sup>2</sup> สมศรี และสมัยเป็นครูในกลุ่มนี้ ค่ามาตรฐานของอายุครู 2 คนนี้ต่างกัน 0.5 ถ้าอีก 30 ปี ครูสมศรีจะมีอายุครบ 60 ปี และครบเกษียณอายุราชการพอดี จงหาว่า อีกกี่ปีครูสมัยจึงจะครบเกษียณอายุราชการ

24. กำหนด  $a, b, n$  เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่  $a + b = 2^n$  และ  $f(a) + f(b) = n^2$   
จงหา ค่าของ  $f(2002)$

25. มีชาย 6 คน หญิง 6 คน เป็นตัวแทนจาก 3 จังหวัด จังหวัดละ 4 คน โดยแบ่งเป็นชาย 2 คน หญิง 2 คน ถ้าจัดให้ชาย 2 คน นั่งสลับกับหญิง 2 คน รอบโต๊ะกลม

จงหา ความน่าจะเป็นที่คนสองคนนั่งติดกันทุกคู่มาจากจังหวัดเดียวกัน

**วันที่แปด เดือนกุมภาพันธ์ ร.ศ. ๙๐๙๙๓๓**

