



ข้อสอบการแข่งขันคณิตศาสตร์เพชรยอดมงกุฏ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ครั้งที่ 12

วันอาทิตย์ที่ 23 สิงหาคม 2552

เวลา 9.00 - 11.00 น.

ณ โรงเรียนวัดสุทัศนวราราม

ข้อทบทวน

1. ให้ Z, R แทนเซตของจำนวนเต็ม และเซตของจำนวนจริง ตามลำดับ
2. ให้ Z^+, R^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก และเซตของจำนวนจริงบวก ตามลำดับ
3. สำหรับ $x \in R$ กำหนด $\lfloor x \rfloor$ แทนจำนวนเต็มที่มากที่สุด ที่น้อยกว่า หรือเท่ากับ x

เช่น $\lfloor 2.5 \rfloor = 2, \lfloor -2.5 \rfloor = -3$

4. ให้ $N \in Z^+$ และ $N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ เป็นการเขียนแทน N ในระบบฐาน 10

กำหนด $\text{Sum}(N) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ เช่น $\text{Sum}(1789) = 1 + 7 + 8 + 9 = 25$

5. สำหรับเซตจำกัด X เรากำหนด $|X|$ แทนจำนวนสมาชิกของ X

คำชี้แจง เฉลือคำตอบที่ถูกต้องเพียงคำตอบเดียว

1. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

$$(1) \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \quad \text{และ} \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$(2) \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \quad \text{และ} \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| ก. ข้อ (1) และข้อ (2) ถูกต้อง | ข. ข้อ (1) ถูกต้อง และข้อ (2) ผิด |
| ค. ข้อ (1) ผิด และข้อ (2) ถูกต้อง | ง. ข้อ (1) และข้อ (2) ผิด |

2. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

$$(1) \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2$$

$$(2) \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_\pi 2} > 2$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| ก. ข้อ (1) และข้อ (2) ถูกต้อง | ข. ข้อ (1) ถูกต้อง และข้อ (2) ผิด |
| ค. ข้อ (1) ผิด และข้อ (2) ถูกต้อง | ง. ข้อ (1) และข้อ (2) ผิด |





3. ให้ $x \in \mathbb{R}$ และ $4^x + 4^{-x} = 7$ ค่าของ $8^x + 8^{-x}$ ตรงกับข้อใด

ก. 17

ข. $17\sqrt{2}$

ค. 18

ง. $18\sqrt{3}$

4. ให้ $S = (\tan 10^\circ)(\tan 20^\circ)(\tan 30^\circ)(\tan 40^\circ)(\tan 50^\circ)(\tan 60^\circ)(\tan 70^\circ)(\tan 80^\circ)$

จงหาว่า S มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 1

ข. $\sqrt{2}$

ค. $\sqrt{3}$

ง. 2

5. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $f(x) = \sin(\sin x)$

จงหาว่า $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + h) - f(\pi)}{h}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 0

ข. 1

ค. -1

ง. $\frac{1}{\pi}$





6. จงหาค่าของ $S = 2\sqrt{1.5 + \sqrt{2}} - (1.5 + \sqrt{2})$ ในรูปอย่างง่าย

ก. $\frac{1}{2}$

ข. $\sqrt{2}$

ค. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ง. 2

7. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่สุดคค้องกับ $a + \sqrt{b} = \sqrt{15 + \sqrt{216}}$

ค่าของ $\frac{b}{a}$ ตรงกับข้อใด

ก. 1

ข. 2

ค. 3

ง. 4

8. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวของด้านทั้งสามเป็นจำนวนเต็ม

ถ้าด้านด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม ABC ยาว 11 หน่วย

แล้ว พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับกี่ตารางหน่วย

ก. 1830

ข. 660

ค. 300

ง. 330





9. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $\angle ACB = 120^\circ$ และ D เป็นจุดบนด้าน AB ที่ทำให้ CD แบ่งครึ่ง $\angle ACB$

ถ้าด้าน AC และ BC ยาว 5 หน่วย และ 10 หน่วย ตามลำดับแล้ว ด้าน CD ยาวกี่หน่วย

- | | |
|------|-------------------|
| ก. 4 | ข. $3\frac{1}{3}$ |
| ค. 3 | ง. $2\frac{2}{3}$ |

10. จำนวนเต็มบวก N ที่น้อยที่สุดที่มี 10^{2009} เป็นตัวประกอบของ $N!$ คือจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|---------|----------|
| ก. 4018 | ข. 8050 |
| ค. 8051 | ง. 10000 |

11. ให้ $A = \{a \in \mathbb{R} \mid |\{x \in \mathbb{R} \mid a \cdot 3^x + 3^{-x} = 3\}| = 1\}$
ข้อสรุปในข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| ก. $\{0, 1\} \subset A$ | ข. $\{1, \frac{9}{4}, -1\} \subset A$ |
| ค. $\{\frac{9}{4}, -5000\} \subset A$ | ง. $A \subset (-\infty, 2]$ |





12. ใ้ M = {m ∈ R / |{x ∈ R / √(x-5) = mx + 2}| = 2}

ข้อใดต่อไป้กล่าวได้ถูกต้อง

ก. -1/2 ∈ M

ข. 1/10 ∈ M

ค. M ∩ Z = ∅

ง. (-1/2, 1/10) ⊂ M

13. ใ้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ใ้ 55n^5 มีจำนวนตัวประกอบที่เป็จำนวนบวกรวมทั้ง 55 จำนวน จำนวนใ้ข้อใดต่อไป้คือจำนวนตัวประกอบที่เป็บวกของ 9n^9

ก. 4888

ข. 5878

ค. 6888

ง. 7088

14. ใ้ A = (2.000000000004) / ((1.000000000004)^2 + 2.000000000004)

B = (2.000000000002) / ((1.000000000002)^2 + 2.000000000002)

P = (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^99) / (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^100)

Q = (1 + 3 + 3^2 + ... + 3^99) / (1 + 3 + 3^2 + ... + 3^100)

ข้อสรุปใดต่อไป้ถูกต้อง

ก. A > B และ P > Q

ข. A > B และ P < Q

ค. A < B และ P > Q

ง. A < B และ P < Q





18. ให้ $N = 1111111111$ จงหาว่า $\text{Sum}(N^2)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 82

ข. 84

ค. 90

ง. 100

19. ให้ $A = 777 \dots 7$ (1001 หลัก)

จงหาว่าเศษที่เกิดจากการหาร A ด้วย 1001 มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 700

ข. 707

ค. 777

ง. 1000

20. ให้ $S = \sum_{i=1}^{256} \lfloor \log_2 i \rfloor$ ค่าของ S สอดคล้องกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $S \leq 256$

ข. $1000 \leq S \leq 1500$

ค. $1500 < S < 1550$

ง. $S \geq 1550$





21. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $f(x) = \sqrt{8x - x^2} - \sqrt{14x - x^2} - 48$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นคำตอบ

ก. โดเมนของ f คือ $[5, 7]$

ข. ค่าสูงสุดของ f คือ $2\sqrt{3}$

ค. ค่าต่ำสุดของ f คือ 5

ง. เรนจ์ของ f คือ \mathbb{R}

22. ให้ $N = \{a, b\}$ เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้า 99 เป็นตัวประกอบหนึ่งของ N แล้ว ข้อสรุปในข้อใดต่อไปนี้เป็นคำตอบ

ก. $a = 0$ และ $b = 8$

ข. $a = 2$ และ $b = 6$

ค. $a = b = 4$

ง. $a = 6$ และ $b = 2$

23. ให้ $\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / a, b, c, d \in \{0, 1\} \right\}$ และ $X = \{A \in \mathcal{S} / \det A \neq 0\}$

จงหาว่า $\frac{|X|}{|\mathcal{S}|}$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้เป็นคำตอบ

ก. $\frac{1}{8}$

ข. $\frac{1}{4}$

ค. $\frac{3}{8}$

ง. $\frac{1}{2}$





24. ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{a, b, c, d\}$

จงหาว่าจำนวนของความสัมพันธ์ r จาก A ไป B ซึ่งโดเมนของ r มีสมาชิกเพียง 2 ตัวเท่านั้น

มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 3000

ข. 2048

ค. 1024

ง. 675

25. ให้ $a = (10^{100})^{10}$, $b = 10^{(10^{10})}$, $c = 1000000!$, $d = (100!)^{10}$

ข้อสรุปใดต่อไปนี้เป็นจริง

ก. $a < c < d < b$

ข. $a < d < c < b$

ค. $a < d < b < c$

ง. $a < b < c < d$

26. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จงหาว่าสมการ $x^4 + (2 - p)x^3 + (2 - 2p)x^2 + (1 - 2p)x - p = 0$

มีคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มทั้งสิ้นกี่คำตอบ

ก. 1

ข. 2

ค. 3

ง. 4





27. สุ่มหยิบจำนวนจริง a, b ในช่วง $[-1, 1]$ ความน่าจะเป็นที่ $|a| + |b| \leq 1$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\frac{1}{2}$

ข. $\frac{1}{3}$

ค. $\frac{1}{4}$

ง. $\frac{1}{5}$

28. ให้ l เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0, 0)$ และสัมผัสกราฟที่มีสมการ $y = x^3 + 3x + 1$ ณ จุด (a, b) ข้อสรุปในข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

ก. $a = \frac{1}{2}$

ข. $a^2 = \frac{1}{2}$

ค. $a^3 = \frac{1}{2}$

ง. $a^3 = 2$

29. ให้ P เป็นจุดภายในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $ABCD$

ถ้าระยะทางจากจุด P ไปยังจุด A, B, C และ D เท่ากับ 7, 35, 49 และ x หน่วย ตามลำดับ

แล้ว x เท่ากับเท่าใด

ก. 27

ข. 35

ค. 36

ง. 49





30. ให้ a, b, c แทนรากทั้งสามของสมการ $x^3 - 7x^2 - 6x + 5 = 0$

จงหาค่าของ $(a + b)(a + c)(b + c)$ ตรงกับข้อใด

ก. -35

ข. -37

ค. 35

ง. 37

31. กำหนดให้ $x, y \in \mathbb{R}$ และ $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$x + \sin y = 2009 \quad \text{และ} \quad x + 2009 \cos y = 2008$$

จงหาค่า $x + 8 \cos 2y$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 2000

ข. 2008

ค. 2016

ง. 2032

32. ให้ $U = \{1, 2, 3, \dots, 2009\}$

$$\text{และ } A = \{n \in U / \{x \in \mathbb{R} / \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor = n\} \neq \emptyset\}$$

จงหาค่า $|A|$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 1341

ข. 1340

ค. 1339

ง. 1338





33. ให้ $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{100}$

ค่าของ $f''(1) - f'(1) + f(1)$ ตรงกับข้อใด

ก. 328351

ข. 333301

ค. 328350

ง. 333300

34. ให้ $f(n) = \sum_{i=2}^{2009} \frac{1}{i^n}$ ค่าของ $\sum_{k=2}^{\infty} f(k)$ ตรงกับข้อใด

ก. 1

ข. $\frac{2008}{2009}$

ค. $\frac{2009}{2008}$

ง. 2

35. ให้ f เป็นฟังก์ชัน กำหนดฟังก์ชัน g, h โดย

$$g(x) = f(x) - f(2x) \quad \text{และ} \quad h(x) = f(x) - f(4x)$$

ถ้า $g'(1) = 5$ และ $g'(2) = 7$ แล้ว $h'(1)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 1

ข. 5

ค. 7

ง. 19





36. $\left[\frac{1}{2\lfloor\sqrt{1}\rfloor+1} + \frac{1}{2\lfloor\sqrt{2}\rfloor+1} + \frac{1}{2\lfloor\sqrt{3}\rfloor+1} + \dots + \frac{1}{2\lfloor\sqrt{100}\rfloor+1} \right]$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 6

ข. 7

ค. 8

ง. 9

37. สามเหลี่ยม ABC มี AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม ยาวเท่ากับ 10 หน่วย

CD และ CE แบ่งมุม ACB ออกเป็นสามส่วนเท่าๆ กัน

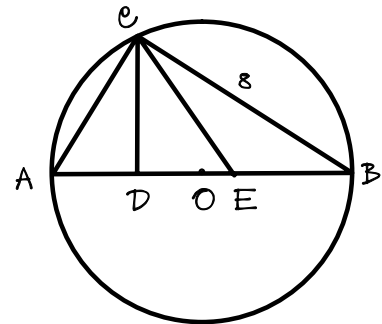
ถ้า $CB = 8$ หน่วยแล้ว CE ยาวกี่หน่วย

ก. $\frac{48(3\sqrt{3} + 4)}{11}$

ข. $\frac{48(3\sqrt{3} - 4)}{11}$

ค. $\frac{24(3\sqrt{3} + 4)}{7}$

ง. $\frac{24(3\sqrt{3} - 4)}{7}$



38. ให้ x เป็นคำตอบของสมการ $\cos(\arctan x) = x$

ค่าของ x^2 เท่ากับเท่าใด

ก. $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$

ข. $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

ค. $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$

ง. $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$





39. ให้ $f(x) = ax^5 + 7x^4 - 4x^3 - b$

ถ้า $(x + 1)^2$ เป็นตัวประกอบของ $f(x)$ แล้ว ค่าของ $a^3 - b^3$ ตรงกับข้อใด

ก. 503

ข. 485

ค. 403

ง. 385

40. จากรูป BC เป็นเส้นสัมผัสวงกลม และ BE แบ่งครึ่งมุม ABD

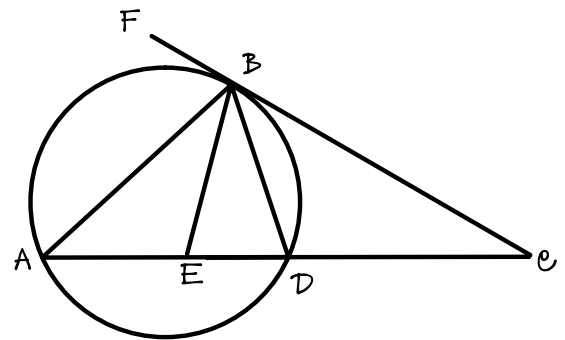
ถ้ามุม $BED = 64$ องศาแล้ว มุม BCA กางกี่องศา

ก. 52

ข. 55

ค. 60

ง. 75



วันที่สิบเก้า เดือนเจ็ด พอสองหน้าหน้าสาม

