



ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์

สมาคมศิษย์เก่าโรงเรียนนครสวรรค์ ระดับประเทศ ครั้งที่ 8/2548

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 สอบวันเสาร์ที่ 3 ธันวาคม 2548

ใช้เวลาทำ 3 ชั่วโมงนะจ๊ะ

1. ถ้าลำดับเลขคณิต a_1, a_2, a_3, \dots มีพจน์ที่ 15 เป็น -34

แล้ว $\sum_{n=1}^{29} (a_n + 2n)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

2. กำหนดให้ a, b, c เป็นลำดับเรขาคณิต และมีผลคูณ 3 พจน์แรกเป็น 27

ถ้า $a, b + 3, c + 2, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต

แล้ว $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

3. ถ้าผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $7 + 13 + 19 + \dots$ มีค่าเท่ากับ 1280

แล้ว $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

4. ถ้า $y = mx + c$ โดยที่ m, c เป็นค่าคงตัว และ

$$28 = 5c + 10m \quad \dots\dots (1)$$

$$67 = 10c + 30m \quad \dots\dots (2)$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 28$$

แล้ว $\sum_{i=1}^5 y_i$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (ตอบเป็นทศนิยม 1 ตำแหน่ง)





5. ถ้า $\sum_{i=1}^{10} (x_i - 3) = -38$, $\sum_{i=1}^{10} 2y_i = 8$ และ $\sum_{i=1}^{10} (5 - x_i)(y_i + 2) = 76$

แล้ว $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i$ มีค่าเท่าใด

6. ถ้า S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cos(n\pi)$

แล้ว $1 + 4S_{50}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

7. ถ้า a_n เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล 1, 2, 2, 3, 3, 3, ..., $\underbrace{n, n, n, \dots, n}_{\text{มี } n \text{ พจน์}}$

แล้ว $\sum_{n=1}^{30} a_n$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

8. ถ้า $20, x_2, \dots, x_{25}$ เป็นข้อมูลที่เรียงจากน้อยไปหามาก และเป็นลำดับเลขคณิต และเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 ของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับ 31 แล้ว ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับเท่าใด

9. ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่กำหนดโดย

$$S_n - S_{n-1} = 4^{n-1} \text{ สำหรับ } n = 1, 2, 3, \dots \text{ และ } S_0 = \frac{1}{3}$$

แล้ว $\frac{6S_n}{5 \cdot 2^{2n}}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (ตอบทศนิยม 1 ตำแหน่ง)



10. กำหนดให้ลำดับ a_n สอดคล้องกับสมการ

$$\frac{2a_1}{3} + a_2 + \frac{4a_3}{3} + \dots + \frac{(n+1)a_n}{3} = \frac{n+2}{n+3} \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนนับ}$$

แล้ว $\frac{a_{99}}{a_{98}}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (ตอบเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ)

11. ให้ $\{a, b\}$ เป็นเซตคำตอบของสมการ $2^{x+2} - 9\sqrt{2^x} + 2 = 0$ โดยที่ $a > b$

ถ้า $m = a - b$ แล้ว $(25)^{\log_5 m}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

12. ถ้า $\log_6 2 = a$ แล้ว $\log_3 2$ มีค่าเท่าใด (ตอบในรูปของ a)

13. ถ้า $\log_6 3, \log_9(3^x - 2), \log_9(3^x + 16)$ เป็นสามพจน์แรกที่เรียงกันในลำดับเลขคณิต

และ $M = \begin{bmatrix} 3^x & 1 \\ 20 & 2 \end{bmatrix}$ และ I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ 2×2 แล้ว $\det(m^{-1} + 5I)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

14. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $(4^x - 2)\log(1 - x^2) > 0$

ถ้า a เป็นค่าขอบเขตบนน้อยสุดของ A และ b เป็นค่าขอบเขตล่างมากสุดของ A

แล้ว ห.ร.ม. ของ $12a$ กับ $4b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด





15. กำหนดให้ $y = 4 \cdot 2^{\log x^2} - 9 \cdot 2^{\left(\log \frac{x}{10} + 1\right)} + 2$ ตัดแกน X ที่จุด $(a, 0)$ และ $(b, 0)$ โดยที่ $a > b$
แล้ว $a \cdot \sin \frac{11\pi}{6}$ มีค่าเท่าใด

16. กำหนด $\log_a d = 2$, $\log_b d = -1$ และ $\log_c d = \frac{2}{5}$
แล้ว $\log_{abcd} d$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (ตอบเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ)

17. กำหนดให้ $a > 0$ และ

$$g(x) = \begin{cases} -a(10^x) & ; x < 1 \\ x^3 - 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

ถ้า $R_g = (-2.5, \infty)$ แล้ว $g^{-1}(a - 1)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

18. กำหนดให้ (a, b) เป็นเซตคำตอบของสมการ $\log(3x + 4) > \log(x - 1) + 1$
และ $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ แล้ว $x + 3$ หาร $P(x)$ เหลือเศษเท่ากับเท่าใด

19. ให้ $f(y) = (\log_2 y)^6 + m(\log_2 y)^3 - \log_2 y - 1$ เมื่อ $m \in R$

และ $1 + \log_2 y$ หาร $f(y)$ เหลือเศษ 1

ถ้า p คือเศษที่ได้จาก $\log_2 y$ หาร $(f(y) + 5)$ แล้ว 2^{p-6} มีค่าเท่ากับเท่าใด (ตอบทศนิยม 2 ตำแหน่ง)



20. กำหนดให้ m, n และ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และ $x \neq 1$ เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\log_m x$ เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $\log_n x$ กับ $\log_k x$ แล้ว $\frac{\log_k m + \log_n m}{6\log_m n - 3\log_k n}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (ตอบเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ)

21. ถ้า $y = 2x - 1$ ทำมุม θ กับแกน X ทางบวก โดยที่ $0 \leq \theta < \pi$ แล้ว $\sin 2\theta$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (ตอบเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ)

22. กำหนดให้ $\sin A + \cos A = \frac{4}{3}$ โดยที่ $\sin A > \cos A$ แล้ว $\sin^3 A - \cos^3 A$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

23. $\arcsin\left(\sin \frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(\arccos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

24. ถ้า $\arctan x = \arctan \frac{1}{4} - 2\arctan \frac{1}{2}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด

25. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin \theta \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ผลบวกของ θ ทั้งหมดที่ทำให้ $\det A = 2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด





26. ให้ A เป็นผลบวกของคำตอบของสมการ $\sin^2 6x + 8\sin^2 3x = 0$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$
แล้ว $\cos^2\left(\arctan \frac{A}{\pi}\right)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด
27. ให้ B เป็นจุดปลายแกนโท ซึ่งอยู่เหนือแกน X ของวงรี $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ และ A กับ C เป็นจุดปลายแกนเอกของวงรีวงนี้แล้ว $\cos \hat{A}BC$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (ตอบในรูปเศษส่วนอย่างต่ำ)

28. กำหนดให้ $C = \left(3 - 4\sin^2 \frac{\pi}{12}\right)\left(4\cos^2 \frac{\pi}{12} - 3\right)$

- ถ้าสามเหลี่ยม ABC มีด้าน BC ยาว 3 หน่วย ด้าน AB ยาว c หน่วย และ $\cos B = \frac{3}{4}$
แล้ว พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับเท่าใด

29. ให้ A คือเซตคำตอบของสมการ $\frac{\sin^2 x - \frac{1}{4}}{\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)} > 0$ เมื่อ $x \in [0, 2\pi]$

- ถ้า M คือค่าขอบเขตล่างมากที่สุดของ A และ N คือค่าขอบเขตบนน้อยที่สุดของ A
แล้ว $\sin(M - N)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

30. ถ้า $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ และ $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ แล้ว $\tan^2 A$ มีค่าเท่ากับเท่าใด



31. กำหนดให้ $(4 + 3i)z^3 = \frac{125\bar{z}}{z^2}$ เมื่อ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้ว $|z|$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

32. ถ้า $z = \cos \frac{\pi}{60} + i \sin \frac{\pi}{60}$ แล้ว $\left(z^{10} - \frac{1}{z^{10}} + 3\right)^4$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบในรูป $a + bi$ โดยที่ $a, b \in R$

33. ถ้า $z_1 = 4(\cos 145^\circ + i \sin 145^\circ)$ และ $z_2 = \sqrt{3}(\cos 115^\circ + i \sin 115^\circ)$
 แล้ว $|z_1 - z_2|^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

34. ถ้าจำนวนเชิงซ้อน w เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $z^3 + z^2 + 3z - 5 = 0$ และ $|w - (2 + 2i)| = 3$
 แล้ว อินเวอร์สการคูณของ w มีค่าเท่าใด

35. ให้ A เป็นจุดบนวงกลม $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 11 = 0$ ซึ่งอยู่ใกล้กับจุดโฟกัส F ของพาราโบลา
 $x^2 - 12x + 4y + 52 = 0$ มากที่สุดแล้ว $(\overline{A - F})(A - F)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

36. กำหนดให้ $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$ เมื่อ $a, b \in R$

ถ้า -3 เป็นรากหนึ่งของ $P(x)$ และเศษที่ได้จากการหาร $P(x)$ ด้วย $x + 1$ เท่ากับ 4
 แล้ว เซตคำตอบของสมการ $P(x) = 0$ คือเซตใด (เขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก)





37. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ $f(x) = x^4 - 6x^3 + 15x^2 + ax + b$
 จำนวนเชิงซ้อน $1 + i$ และ $2 + i$ เป็นรากของ $f(x)$ แล้ว $x - 1$ หาร $f(x)$ เหลือเศษเท่ากับเท่าใด

38. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $z^5 - i = 0$ และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $z^9 - i = 0$
 แล้ว $A \cap B$ คือเซตใด (เขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิกและเขียนสมาชิกของเซตในรูป $a + bi$ โดยที่ $a, b \in R$)

39. กำหนดให้ $x = \cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8}$ และ $z = \bar{x} - x^5$
 แล้ว $|z|$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

40. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งอยู่ใน ควอดรนต์ที่ 2 และสอดคล้องกับสมการ
 $|4iz^{-1} + 9z| = 6\sqrt{2}$ และ $|z - 1| = \sqrt{2}$
 แล้ว $z + \bar{z}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

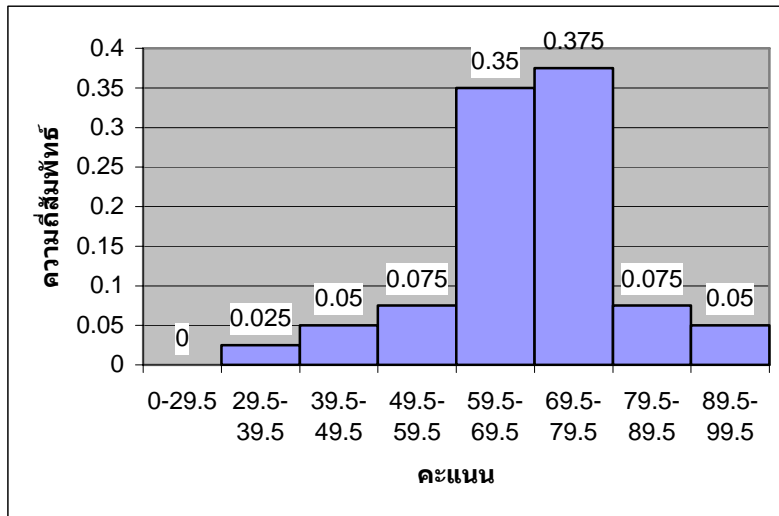
41. กำหนดตารางแสดงผลการสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งเป็นดังนี้

คะแนน	จำนวนนักเรียน
1 - 9	12
10 - 18	18
19 - 27	10
28 - 36	10

ค่ามัธยฐานมากกว่าค่าฐานนิยมเท่ากับเท่าใด (ตอบเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง)



42. กำหนดฮิสโทแกรมของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 80 คน ดังนี้



จำนวนนักเรียนที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 62 คะแนน มีจำนวนกี่คน

43. กำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์

ถ้า A เป็นเมตริกซ์มิติ 3×3 ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $2AB = I$ และ $AX = C$

แล้ว พิสัยของข้อมูล x, y, z มีค่าเท่ากับเท่าใด

44. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย x_1, x_2, \dots, x_{13} โดยที่ $x_n = |5 - n|$ เมื่อ $n = 1, 2, \dots, 13$

และ a เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\sum_{n=1}^{13} |x_n - a|$ มีค่าน้อยที่สุด b เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้

แล้ว $b - a$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (ตอบในรูปทศนิยม 2 ตำแหน่ง)



45. กำหนดตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนสอบวิชาภาษาไทยที่เป็นจำนวนเต็มของนักเรียน 40 คน เป็นดังนี้

คะแนน	จำนวนนักเรียน
60 - 64	4
65 - 69	a
70 - 74	10
75 - 79	b
80 - 84	7

เมื่อสุ่มเลือกนักเรียนกลุ่มนี้มีมาหนึ่งคนได้ว่า ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้ได้คะแนนน้อยกว่า 70 คะแนน มีค่าเท่ากับ 0.30 แล้ว เปอร์เซนต์ไทล์ที่ 60 ของคะแนนชุดนี้ มีค่าเท่ากับเท่าใด (ตอบในรูปทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

46. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 20 คน ได้คะแนน (x) สรุปผลดังนี้

$$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 52420 \quad \text{และ} \quad \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 2420$$

แล้ว ผลรวมของคะแนนสอบของนักเรียนทุกคนในกลุ่มนี้มีค่าเท่ากับเท่าใด

47. คะแนนการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นหนึ่ง ซึ่งมีสองห้องมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวมเท่ากับ 54 คะแนน โดยที่ห้อง ก และห้อง ข มีนักเรียน 30 และ 20 คน ตามลำดับ ถ้าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนห้อง ก เท่ากับ 50 คะแนน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 5 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของนักเรียนห้อง ข เท่ากับ 6 คะแนน แล้ว ความแปรปรวนรวมของคะแนนสอบของนักเรียนทั้งชั้นมีค่าเท่าใด (ตอบในรูปทศนิยม 1 ตำแหน่ง)

48. นำฝืนซื้อปากกามา 8 ด้าม มีราคาเท่ากันอยู่ 2 ด้าม อีก 6 ด้าม ราคาต่างกันหมด ราคาของปากกามีมาตรฐานเท่ากับ 36 บาท และค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 36.50 บาท ปากกา 4 ด้าม ราคาถูกกว่าฐานนิยม โดยที่มีราคาเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต ที่มีพจน์ที่หนึ่งเป็น 18 และมีผลต่างร่วมเป็น 4 ส่วนปากกา 2 ด้าม ที่ราคาแพงกว่าฐานนิยม มีราคาต่างกัน 10 บาท จากข้อมูลที่ให้มา $\frac{P_{75} - P_{25}}{2}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (ตอบในรูปทศนิยม 3 ตำแหน่ง)



49. การแจกแจงของจำนวนผู้โดยสารในรถตู้จำนวน 50 คัน ที่เล่นบนถนนสายหนึ่ง เป็นดังนี้

จำนวนผู้โดยสาร (คน)	จำนวนรถ (คัน)
2 หรือมากกว่า	50
8 หรือมากกว่า	36
11 หรือมากกว่า	21
14 หรือมากกว่า	6
17 หรือมากกว่า	0

ฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้ มีค่าเท่ากับเท่าใด (ตอบในรูปทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

50. กำหนดให้ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ เป็นข้อมูลที่เรียงจากค่าน้อยไปมาก โดยที่เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 มีค่าเท่ากับ 13.5

ถ้า $x_1 = 8$ และ $x_2 = 12$ แล้ว ความแปรปรวนของข้อมูล 6, 8, 12, x_3 มีค่าเท่ากับเท่าใด

วันที่สี่สิบสอง เดือนสิบสอง พ.ศ.สองห้าสี่แปด

