Language: **Thai**

Day: **1**

*วันพุธที่ ๗ กรกฎาคม ๒๕๕๓*

**โจทย์ข้อ ๑** จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดซึ่งสอดคล้องสมการ

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor \qquad \text{สำหรับทุก } x, y \in \mathbb{R}$$

(ในที่นี้ สัญลักษณ์ $\lfloor z \rfloor$ หมายถึงจำนวนเต็มค่ามากสุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ $z$)

**โจทย์ข้อ ๒** ให้ $I$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม $ABC$ และ ให้ $\Gamma$ เป็นวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม $ABC$ ให้เส้นตรง $AI$ ตัด $\Gamma$ อีกครั้งที่จุด $D$ ให้ $E$ เป็นจุดบนส่วนโค้ง $\widehat{BDC}$ และ $F$ เป็นจุดบนด้าน $BC$ โดยที่

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC$$

และให้ $G$ เป็นจุดกึ่งกลางส่วนของเส้นตรง $IF$

จงพิสูจน์ว่าเส้นตรง $DG$ และ $EI$ ตัดกันบน $\Gamma$

**โจทย์ข้อ ๓** ให้ $\mathbb{N}$ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก จงหาฟังก์ชัน $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ทั้งหมด ซึ่ง

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

เป็นกำลังสองสมบูรณ์ สำหรับทุก $m, n \in \mathbb{N}$



*เวลา: ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที*

*โจทย์แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม ๗ คะแนน*

*วันพฤหัสบดีที่ ๘ กรกฎาคม ๒๕๕๓*

**โจทย์ข้อ ๔** ให้ $P$ เป็นจุดภายในรูปสามเหลี่ยม $ABC$ เส้นตรง $AP, BP, CP$ ตัดวงกลม $\Gamma$ ซึ่งล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม $ABC$ อีกครั้งที่จุด $K, L$ และ $M$ ตามลำดับ เส้นสัมผัส $\Gamma$ ที่จุด $C$ ตัดเส้นตรง $AB$ ที่จุด $S$ สมมติให้ $SC = SP$ จงพิสูจน์ว่า $MK = ML$

**โจทย์ข้อ ๕** ในกล่อง $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ เริ่มต้นมีเหรียญอยู่กล่องละหนึ่งเหรียญ มีการดำเนินการสองแบบที่อนุญาตให้ทำได้ ดังนี้

*แบบที่* 1: เลือกกล่อง $B_j$ ซึ่ง $1 \le j \le 5$ ที่ไม่ว่างเปล่า หยิบเหรียญหนึ่งเหรียญออกจาก $B_j$ และ ใส่เหรียญสองเหรียญลงใน $B_{j+1}$

*แบบที่* 2: เลือกกล่อง $B_k$ ซึ่ง $1 \le k \le 4$ ที่ไม่ว่างเปล่า หยิบเหรียญหนึ่งเหรียญออกจาก $B_k$ และ สลับทุกอย่างในกล่อง $B_{k+1}$ และ $B_{k+2}$ (ซึ่งอาจว่างเปล่า)

จงหาว่า มีลำดับจำกัดของการดำเนินการดังกล่าวหรือไม่ ที่ทำให้กล่อง $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$ ว่างเปล่า และกล่อง $B_6$ มีเหรียญอยู่ $2010^{2010^{2010}}$ เหรียญพอดี

(*หมายเหตุ*: สัญลักษณ์ $a^{b^c}$ หมายถึง $a^{(b^c)}$ )

**โจทย์ข้อ ๖** ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก สมมติว่ามีจำนวนเต็มบวก $s$ ที่ทำให้

$$a_n = \max\left\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1\right\} \quad \text{สำหรับทุก } n > s$$

จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนเต็มบวก $\ell$ และ $N$ ซึ่ง $\ell \le s$ และทำให้ $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ สำหรับทุก $n \ge N$



*เวลา: ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที*

*โจทย์แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม ๗ คะแนน*