



การแข่งขันคณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย ประจำปี พ.ศ. 2546

สอบแข่งขันรอบที่ 1 สอบวันเสาร์ที่ 28 มิถุนายน 2546

ตอนที่ 1 ชนิดเลือกคำตอบ มี 10 ข้อๆ ละ 2 คะแนน

1. ถ้า $A = \{\emptyset, 1, \{3\}, \{1\}, 2, \{1, 2\}\}$ แล้ว $A \cup P(A)$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 66

ข. 67

ค. 68

ง. 69

2. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นจริงแล้ว $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ มีค่าความจริงเป็นจริงด้วย

(2) ถ้า p, q, r เป็นประพจน์ใดๆ แล้ว $(p \wedge r) \rightarrow (q \rightarrow p)$ เป็นสัจนิรันดร์

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) เป็นจริง แต่ข้อ (2) เป็นเท็จ

ข. ข้อ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อ (2) เป็นจริง

ค. ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) เป็นจริง

ง. ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) เป็นเท็จ

3. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{1-x^4}$

ถ้า $A = \{x / (g \circ f)(x) = 0\}$ และ $B = \{x / g(x) = 0\}$

แล้ว ความสัมพันธ์จาก A ไป B มีทั้งหมดกี่ความสัมพันธ์

ก. 2

ข. 4

ค. 8

ง. 16



4. กำหนดให้ $A(4, 3)$, $B(10, -5)$, $C(3, -4)$ และ $P(u, v)$ เป็นจุดในระนาบ โดยที่ CP ตั้งฉากกับ AB ที่จุด P แล้ว ระยะจากจุด P ไปยังเส้นตรงซึ่งมีสมการ $3x+4y+8=0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{18}{5}$

ข. $\frac{21}{5}$

ค. 5

ง. 6

5. ถ้าวงรีวงหนึ่งผ่านจุด $(3, 2)$ และมีจุดโฟกัสทั้งสองอยู่ที่จุดโฟกัสทั้งสองของไฮเพอร์โบลาซึ่งมีสมการ $7x^2 - 9y^2 + 28x + 36y - 71 = 0$ แล้ว สมการของวงรีนี้ คือข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$

ข. $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$

ค. $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

ง. $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

6. ถ้าวงกลมวงหนึ่งผ่านจุด $(1, 3)$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดโฟกัสของพาราโบลาซึ่งมีสมการ $x^2 - 8x + 8y + 8 = 0$ แล้ว สมการของวงกลมวงนี้ คือข้อใดต่อไปนี้

ก. $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 45$

ข. $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25$

ค. $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 13$

ง. $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$



7. กำหนดให้ m, n และ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และ $x \neq 1$ เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\log_m x$ เป็นค่าเฉลี่ยของ $\log_n x$ กับ $\log_k x$ แล้ว $\frac{\log_k m + \log_n m}{2\log_m n - \log_k n}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

- ก. 1
- ข. 2
- ค. 4
- ง. 6

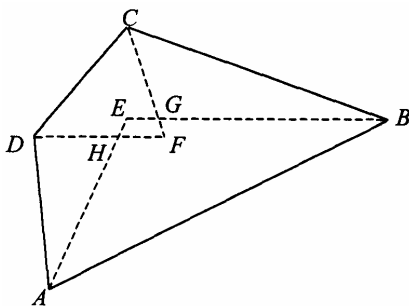
8. กำหนดให้ $R =$ เซตของจำนวนจริง

ถ้า A เป็นบริเวณในระนาบซึ่งนิยามโดย $A = \{(x, y) \in R \times R / |x| + |y| + |x + y| \leq 2\}$

แล้ว เราไม่สามารถคำนวณพื้นที่ของ A ได้จากรูปหลายเหลี่ยมในข้อใด

- ก. สามเหลี่ยมมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ 6 รูป
- ข. สามเหลี่ยมมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ 2 รูป กับสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เท่ากันทุกประการ 2 รูป
- ค. สี่เหลี่ยมด้านขนานที่เท่ากันทุกประการ 2 รูป กับสี่เหลี่ยมจัตุรัส 1 รูป
- ง. สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เท่ากันทุกประการ 2 รูป กับสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 1 รูป

9. ในรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ใดๆ ถ้าเส้นแบ่งครึ่งมุม A, B (ที่อยู่ติดกัน) และเส้นแบ่งครึ่งมุม C, D (ที่อยู่ติดกัน) ตัดกันที่ E และ F ตามลำดับ และจุดตัดอีก 2 จุด ของเส้นแบ่งครึ่งเหล่านี้ คือจุด G และ H ดังรูปแล้ว ข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริง



- ก. $\hat{AEB} + \hat{CFD} < 180^\circ$
- ข. $\hat{AHD} + \hat{BGC} > 180^\circ$
- ค. มีวงกลมผ่าน E, F, G, H ได้เพียงวงเดียว
- ง. ไม่สามารถเขียนวงกลมผ่านทั้ง 4 จุด คือ E, F, G, H ได้



pratabong

www.pratabong.com

the professional

tel. 0-2613-5513 0-2613-5613 0-2251-7251

10. จากการสำรวจพฤติกรรมการทำงานทุเรียน, มะม่วง และมังคุดของคน 100 คนกลุ่มหนึ่ง พบว่า ทุกคนชอบทานผลไม้ทั้งสามชนิดนี้อย่างน้อยหนึ่งอย่าง

ถ้ามี 50 คน ไม่ชอบทานมังคุด 30 คน ชอบทานมังคุดแต่ไม่ทานทุเรียน และมี 10 คน ชอบทานผลไม้ทั้งสามอย่างนี้แล้ว จำนวนคนที่ชอบทานทุเรียน และมังคุด แต่ไม่ชอบทานมะม่วงเลย เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 10 คน

ข. 20 คน

ค. 25 คน

ง. 35 คน



ตอนที่ 2 ชนิดเติมคำตอบ มี 25 ข้อๆ ละ 4 คะแนน

1. ถ้า $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ$ แล้ว จำนวนทั้งหมดของ x ที่สอดคล้องสมการ

$$\tan x = \tan(x+10^\circ) \cdot \tan(x+20^\circ) \cdot \tan(x+30^\circ)$$

มีกี่จำนวน

2. จงหาคำตอบทั้งหมดของระบบสมการ *

$$\left. \begin{array}{l} \sin(x+y) = 0 \\ \sin(x-y) = 0 \end{array} \right\} *$$

เมื่อ x และ y สอดคล้องกับเงื่อนไข $0 \leq x \leq \pi$ และ $0 \leq y \leq \pi$

3. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x & y & z \end{bmatrix}$

ถ้า $\det A = \alpha$ และ $\det B = \beta$ และสำหรับ $i=1, 2, 3$

นิยาม $\alpha_i =$ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่เกิดจากการเปลี่ยนสมาชิกในหลักที่ i ของเมทริกซ์ A เป็นสมาชิกในหลักที่ i ของเมทริกซ์ B

และ นิยาม $\beta_i =$ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่เกิดจากการเปลี่ยนสมาชิกในหลักที่ i ของเมทริกซ์ B เป็นสมาชิกในหลักที่ i ของเมทริกซ์ A

แล้ว จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{bmatrix}$ ในรูปของ α, β และ α_i, β_i เมื่อ $i=1, 2, 3$



4. ถ้า $S = \{x \in R / x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0\}$ แล้ว $R - S$ คือเซตใด
กำหนดให้ $R =$ เซตจำนวนจริง

5. ผลคูณของคำตอบของสมการ $(0.4)^{\log^2 x + 1} = (6.25)^{2 - \log x^3}$ มีค่าเท่าใด

6. ถ้าคู่อันดับ $(x, y) = (a, b)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ *

$$\left. \begin{array}{l} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2 y = 1 \end{array} \right\} *$$

แล้ว จงหาคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมดที่ $a, b > 0$

7. กำหนดระบบสมการ *

$$\left. \begin{array}{l} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 Z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{array} \right\} *$$

ถ้า $x = a$, $y = b$ และ $z = c$ เป็นคำตอบของระบบสมการ *

แล้ว $6a + 8b - 3c$ เท่ากับเท่าใด



8. กำหนดให้ a , b และ c เป็นจำนวนเต็มใดๆ ที่ $a \neq 0$, $b \neq 0$ และ

$$S = \{(x, y) \in I \times I \mid ax + by = c\}$$

$d =$ ตัวหารร่วมมากของ a และ b

ถ้า d หาร c ไม่ลงตัวแล้ว จงหาเซต S

9. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f(n)$ แทนจำนวนคู่อันดับ (x, y) ทั้งหมดที่สอดคล้องกับ $x + 2y = n$ โดยที่ x, y และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามสำหรับแต่ละจำนวนจริง t โดย

$$g(t) = 2t^3 + t^2 - 2t - 3$$

จงหาค่าของ $(g^{-1} \circ f)(5)$

10. กำหนดให้ $R =$ เซตของจำนวนจริง

ถ้า $f: R \rightarrow R$ สอดคล้องเงื่อนไขดังนี้

$$x \cdot f(x) + f(1-x) = 2x - x^2 \quad \text{ทุก } x \in R$$

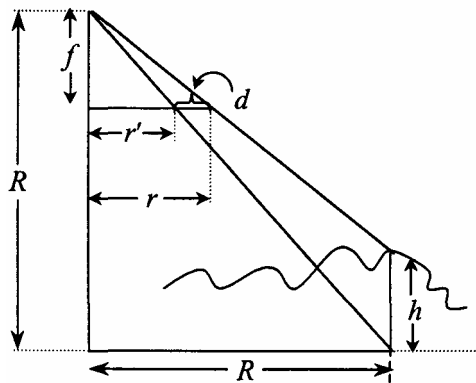
แล้ว ผลคูณ $\frac{1}{2545} f(2004) \cdot f(2546)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

11. กำหนดให้ a_1, a_2, \dots, a_n เป็นจำนวนจริง และ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 + a_3 & a_3 + a_4 & \dots & a_1 + a_2 \\ a_2 + a_3 + a_4 & a_3 + a_4 + a_5 & \dots & a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 + a_3 + \dots + a_n & a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_1 & \dots & a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \end{bmatrix}$$

จงหา a_1, a_2, \dots, a_n ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ที่ทำให้ดีเทอร์มิแนนต์ของ A เป็นศูนย์ พร้อมบอกเหตุผลมาอย่างสั้นๆ

12. จงหา h ในนิพจน์ของ d (ให้ $d = r - r'$) และค่าอื่นๆ ที่กำหนดให้ในรูปภาพต่อไปนี้



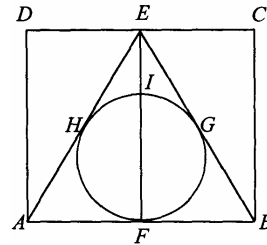
13. เส้นผ่านศูนย์กลาง AB ของวงกลมวงหนึ่ง ตั้งฉากกับคอร์ด CD ที่จุด Y
 ให้ K เป็นจุดบนส่วนโค้ง CBD ของวงกลม สร้างวงกลมอีกวงหนึ่งภายใน สัมผัสกับวงกลมเดิมที่จุด K
 และสัมผัสกับ CD ที่จุด N ให้ AX เป็นความยาวเส้นสัมผัสจาก A มายังวงกลมที่สร้างขึ้น
 ถ้า AX ยาว a หน่วยแล้ว จงหาความยาวของ AC^2



14. อาจารย์ผู้สอนวิชาภาษาไทย ต้องส่งนักเรียนชาย และหญิง 2 คู่ ไปแข่งขันตอบปัญหา โดยคัดเลือกจากนักเรียนชาย 3 คน (ด.ช.จันทร์, ด.ช.มนต์, ด.ช.ชล) และนักเรียนหญิง 3 คน (ด.ญ.สุดา, ด.ญ.ลัดดา, ด.ญ.อารี) ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

- (1) ถ้าส่ง ด.ช. จันทร์ไป ควรจะส่ง ด.ญ.สุดาไปเข้าคู่กัน
 - (2) ไม่ควรส่ง ด.ญ. สุดาไป ถ้าเห็นว่าควรส่ง ด.ช. มนต์ไป
 - (3) ไม่ควรส่ง ด.ช. มนต์ไป ถ้าส่ง ด.ช.ชล หรือ ด.ญ. ลัดดาไป
 - (4) ระหว่าง ด.ช. ชล และ ด.ญ. ลัดดา ต้องเก็บไว้แข่งขันได้วาที 1 คน
- จงพิจารณาว่า ควรจะส่งนักเรียนคู่ใด ไปแข่งขัน

15. $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
 E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน CD
 F, G, H เป็นจุดสัมผัสของวงกลม O ที่แนบใน $\triangle AEB$
กับด้าน AB, BE และ EA ตามลำดับ
 EF ซึ่งผ่านจุดศูนย์กลาง O ตัดวงกลมนี้ที่จุด I
ถ้ารัศมีของวงกลมนี้ยาว r หน่วย
ผลคูณของ EI และ EF มีค่าเท่าไร (ตอบในพจน์ของ r)



16. กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็ม มีมุม A เป็นสองเท่าของมุม B และมุม C เป็นมุมป้าน

ถ้าด้าน AC มีความยาวอยู่ระหว่าง 13 กับ 18 แล้ว ความยาวเส้นรอบรูปของ $\triangle ABC$ เท่ากับเท่าใด



17. ให้ ABC เป็น Δ ด้านเท่า จุด A', B', C' อยู่บนด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ
ซึ่งทำให้ $|AC'| = 2|C'B|$, $|BA'| = 2|A'C|$ และ $|CB'| = 2|B'A|$
ถ้าพื้นที่ของ ΔABC เท่ากับ 126 ตารางหน่วย
จงหา พื้นที่ของสามเหลี่ยมที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นตรง AA', BB' และ CC'

18. ถ้ามีเงินอยู่ 1000 บาท จะแลกธนบัตรฉบับละ 20 บาท และฉบับละ 50 บาท
จงหา จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะแลกธนบัตรให้ได้ทั้งสองชนิด โดยแลกทั้ง 1000 บาท นั้น

19. ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนเซตของจำนวนตรรกยะ ดังต่อไปนี้

$$f(0) = 0, f(1) = 1$$

$$\text{และ } f(x) = \begin{cases} \frac{f(2x)}{4} & ; 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} + \frac{f(2x-1)}{4} & ; \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

- และถ้า $x = 0.b_1b_2b_3\dots$ เป็นจำนวนที่เขียนอยู่ในเลขฐาน 2 ของ x
แล้ว จงหา $f(x)$ ที่เขียนอยู่ในเลขฐาน 2



20. ถ้า $K = \{k \in \mathbb{R} / \left| \frac{x^2 + kx - 1}{x^2 - x + 1} \right| < 2 \text{ ทุกจำนวนจริง } x\}$

แล้ว จงหาเซต K (ให้ตอบเป็นช่วง (interval))

21. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่นิยามดังต่อไปนี้

$$f(x) = |x - 2| \text{ และ } g(x) = \sqrt{(x^2 - 4)^2}$$

ถ้า h เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $h = \frac{g}{f}$ และ $H = \{x \in \mathbb{R} / h \circ h(x) \text{ หาค่าไม่ได้}\}$

แล้ว จงหาเซต H

22. ครู 3 คน คือครูจรรยา ครูชวลิต และ ครูทำนุไปเข้าค่ายกับนักเรียนกลุ่มหนึ่ง มีนักเรียน 3 คน ในกลุ่มนี้

คือ ด.ญ. พุทรา ด.ญ. คะเน และ ด.ญ. บรรจง เป็นบุตรของครูแต่ละคนดังกล่าว

ถ้าทราบว่า

- (1) ด.ญ. คะเน เรียกน้องชายของครูชวลิตว่าคุณลุง
- (2) บุตรสาวของครูทำนุ เคยพา ด.ญ. คะเน ไปพักที่บ้าน 1 คืน
- (3) ด.ญ. พุทรา มีพี่สาว 1 คน แต่บิดาของเธอเป็นลูกโทน

จงพิจารณาว่า ใครเป็นบิดาของ ด.ญ. บรรจง



23. กำหนดให้ A และ B เป็นจุดตัดของ $x^2 + y^2 - 16x + 4y + 48 = 0$ และ $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 32 = 0$ จงหา สมการของกราฟที่เกิดจากเซตของจุด P ซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุด P ไปยังจุด A และจุด B มีค่าเป็น 8 เสมอ

24. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ และ a เป็นจำนวนจริงค่าน้อยสุดที่สอดคล้องสมการ $\det(A - aI_3) = 0$

จงหา $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ที่ทำให้ $(A - aI) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

25. เสาส่งสัญญาณวิทยุสูง 40 เมตร ตั้งบนเนินเขา (ดังรูป)

ช่างเทคนิคได้วัดระยะทางจากจุด A ไปยัง C ได้ 60 เมตร และจากจุด A ไปยัง B ได้ 37 เมตร

ถ้ามุม $\hat{OAC} = 135^\circ$ และ $\hat{OAB} = 75^\circ$ แล้ว ลวดขึง OC ยาวกี่เมตร

