

ข้อสอบการแข่งขันคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย
ประจำปี พ.ศ.2549 (สอบแข่งขันรอบที่ 1)

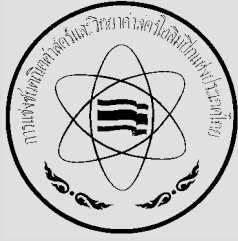
วิชา คณิตศาสตร์

สอบวันเสาร์ที่ 1 กรกฎาคม 2549 เวลา 09.00 – 12.00 น.

แบบทดสอบวิชาคณิตศาสตร์

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้ มี 2 ตอน
ตอนที่ 1 ชนิดเลือกตอบ มี 10 ข้อ ๆ ละ 2 คะแนน
ตอนที่ 2 ชนิดเติมคำตอบ มี 25 ข้อ ๆ ละ 4 คะแนน
2. ใช้เวลาสอบ 3 ชั่วโมง (เวลา 9.00 – 12.00 น.)
3. กรุณากรอกข้อมูลลงในกระดาษคำตอบให้ครบถ้วน



ข้อสอบการแข่งขันคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย
ประจำปี พ.ศ.2549 (สอบแข่งขันรอบที่ 1)

วิชา คณิตศาสตร์

สอบวันเสาร์ที่ 1 กรกฎาคม 2549 เวลา 09.00 – 12.00 น.

ตอนที่ 1 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด (มี 10 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน)

1. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงสอดคล้องกับสมการ $a^2 - bc - 8a + 7 = 0$ และ $b^2 + c^2 + bc - 6a + 6 = 0$ ค่าของ a ที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือข้อใด

ก. $a \in [-7, 1]$

ข. $a \in (0, 7)$

ค. $a \in [1, 9]$

ง. $a \in (-\infty, 1] \cup [9, \infty)$

2. สามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งแนบในวงรีซึ่งมีสมการคือ $x^2 + 5y^2 = 5$ จุดยอดจุดหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมนี้คือ จุด $(0, 1)$ และส่วนสูงหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมนี้อยู่บนแกน y ด้านของรูปสามเหลี่ยมนี้ ยาวเท่ากับเท่าใด

ก. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ หน่วย

ข. $\frac{5}{4}\sqrt{3}$ หน่วย

ค. $\frac{6}{5}\sqrt{3}$ หน่วย

ง. $10\sqrt{3}$ หน่วย

3. กำหนดให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับระบบสมการ

$$xyz = 1$$

$$x + \frac{1}{z} = 25$$

$$y + \frac{1}{x} = 49$$

ถ้า $z + \frac{1}{y} = \frac{m}{n}$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ ห.ร.ม. $(m, n) = 1$ แล้ว

ค่าของ $m + n$ เท่ากับเท่าใด

ก. 325

ข. 331

ค. 625

ง. 637

ตอนที่ 2 จงเติมเฉพาะคำตอบลงในกระดาษคำตอบที่แจกให้
(มี 25 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน)

กำหนดให้ \mathbb{R} แทนเซตของจำนวนจริง
 I แทนเซตของจำนวนเต็ม
 I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก

1. กำหนดให้ $(a-b)(b-c)(c-a) = (a+b)(b+c)(c+a)$

ค่าของ $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ เท่ากับ.....

2. ให้ $P_0(x) = x^3 + 696x^2 - 95x - 10$

นิยาม $P_n(x) = P_{n-1}(x-n)$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n
 สัมประสิทธิ์ของ x ใน $P_{30}(x)$ เท่ากับ.....

3. กำหนดให้ $\frac{1}{x^2 - 15x - 19} + \frac{1}{x^2 - 15x - 39} - \frac{2}{x^2 - 15x - 49} = 0$

เซตคำตอบของสมการคือ.....

4. กำหนดให้ $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันสอดคล้องกับ

$$f(x) = \frac{1+f(x-1)}{1-f(x-1)} \text{ สำหรับทุก } x \in I$$

ถ้า $f(1) = 3$ แล้วค่าของ $f(2548) + f(2549)$ เท่ากับ.....

5. กำหนดให้ $f: I^+ \rightarrow I^+$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับ

1. $f(f(n)) = 4n + 15$ และ

2. $f(2^n) = 2^{n+1} + 5$ สำหรับทุก $n \in I^+$

ค่าของ $f(1659)$ เท่ากับ.....

6. รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีจุดยอดเป็น $A(-8, 5)$, $B(-15, -19)$ และ $C(1, -7)$

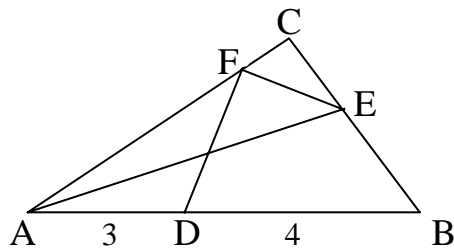
ถ้าสมการเส้นตรงแบ่งครึ่งมุม \hat{BAC} คือ $ax + 2y + c = 0$

แล้วค่าของ $a + c$ เท่ากับ.....

7. กำหนดให้ t เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $(1 + \sin t)(1 + \cos t) = \frac{3}{2}$ แล้ว
ค่าของ $(1 - \sin t)(1 - \cos t)$ เท่ากับ.....
8. รูปสามเหลี่ยม ABC มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A B และ C เป็น a หน่วย
 b หน่วยและ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $a^2 + b^2 = 49c^2$ แล้ว
ค่าของ $\frac{\cot C}{\cot A + \cot B}$ เท่ากับ.....
9. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับ
 $\log_9(a) = \log_{15}(b) = \log_{25}(a + 2b)$
แล้วค่าของ $\frac{b}{a}$ เท่ากับ.....
10. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ
 $\log(1 + a^2) - \log(a) - 2\log(2) = 1 - \log(100 + b^2) + \log(b)$
ค่าของ ab เท่ากับ.....
11. กำหนดให้ $A_k = \frac{k(k-1)}{2} \cos \frac{k(k-1)}{2} \pi$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม
ค่าของ $\sum_{k=15}^{102} A_k$ เท่ากับ.....
12. ค่าของ $\sum_{k=1}^{999} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$ เท่ากับ.....
13. ให้ $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{50}\}$ เป็นสับเซตของ $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ โดยที่ $\sum_{i=1}^{50} a_i = 2001$
และ $a_i + a_j \neq 101$ สำหรับ $1 \leq i < j \leq 50$
ค่าของ $\sum_{i=1}^{50} \frac{1}{101} a_i^2$ เท่ากับ.....
14. กำหนดให้ จุด $A(a, 20)$, $B(b, 55)$ และ $O(0, 0)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม
ด้านเท่า ABO ค่าของ ab เท่ากับ.....

15. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยมีมุม A เป็นมุมฉาก ให้ D และ F เป็นจุดอยู่บน \overline{AC} และ \overline{BC} ตามลำดับ โดยที่ $\overline{AF} \perp \overline{BC}$ และ $BD = DC = FC = 3$ หน่วย AC ยาวเท่ากับ.....หน่วย

16. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม(ตั้งรูป) มีพื้นที่เท่ากับ 28 ตารางนิ้ว D E และ F เป็นจุดบนด้าน \overline{AB} \overline{BC} และ \overline{CA} ตามลำดับ และ $AD = 3$ นิ้ว $DB = 4$ นิ้ว ถ้า $\triangle ABE$ และ $\square DBEF$ มีพื้นที่เท่ากันแล้ว พื้นที่ $\triangle ABE$ เท่ากับตารางนิ้ว



17. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $\hat{A} - \hat{B} = 90^\circ$ และ $BC + CA = 2AB$ ค่าของ $\cos C$ เท่ากับ.....

18. ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 20$

แล้วค่าของ $x^2 + \sqrt{x^4 - 1} + \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 - 1}}$ เท่ากับ.....

19. ถ้า $f: I \rightarrow I$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับ $f(-100) = 15,000$ และ $f(n) = f(n+1) - 3n - 2$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n แล้วค่าของ $f(0)$ เท่ากับ.....

20. กำหนดให้ $x > 0$ และ

$$\frac{1}{x + \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^3 + \frac{1}{x^4}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^3 + \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^5}}}} - \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x + \frac{1}{x^4 + \frac{1}{x^3}}}}$$

เซตคำตอบของสมการคือ.....

21. ให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3^x \cdot 8^{x+2} = 6\}$ และ

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \left| \left| x - \frac{5}{2} \right| - \frac{3}{2} \right| = |x^2 - 5x + 4| \}$$

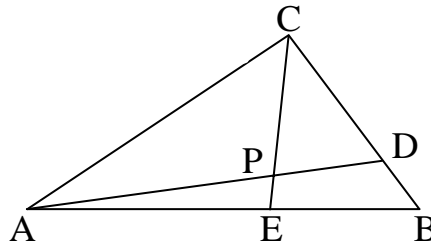
จำนวนสมาชิกของเซต $A \cap B$ เท่ากับ.....

22. กำหนดให้ $f(x) = \frac{4x^2 + 8x + 13}{6(1+x)}$ เมื่อ $x \geq 0$

ค่าต่ำสุดของ $f(x)$ เกิดขึ้น เมื่อ $x = \dots\dots\dots$

23. O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่งที่มี \overline{AB} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง ให้ C เป็นจุดบนวงกลมที่แตกต่างจากจุด A และจุด B ให้ D เป็นจุดบน \overline{AB} โดยที่ $\widehat{CDB} = 90^\circ$ และ M เป็นจุดบน \overline{BC} โดยที่ $\widehat{BMO} = 90^\circ$ ถ้า $OM = \frac{1}{3}DB$ แล้ว \widehat{ABC} เท่ากับ.....องศา

24. ในรูปสามเหลี่ยม ABC ลาก \overline{CE} และ \overline{AD} โดยที่ $\frac{CD}{DB} = \frac{3}{1}$ และ $\frac{AE}{EB} = \frac{3}{2}$



ให้ $r = \frac{CP}{PE}$ เมื่อ P เป็นจุดตัดของ \overline{CE} และ \overline{AD}

ค่าของ r เท่ากับ.....

25. กำหนดให้ $f(x) = \frac{3^{2x}}{3^{2x} + 3}$ ค่าของ $\sum_{k=1}^{2548} f\left(\frac{k}{2549}\right)$ เท่ากับ.....