ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย ประจำปี พ.ศ. 2546 (สอบแข่งขันรอบที่สอง)

ชุดที่หนึ่ง สอบวันที่ 23 สิงหาคม พ.ศ. 2546

ตอนที่หนึ่ง จงเติมเฉพาะคำตอบ ข้อ 1 – 6 ข้อละ 5 คะแนน

1. กำหนดให้

(1) f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 จาก R ไปบน R

โดยที่ $f^{-1} = f,\ f^2 = f \circ f,\ f^3 = f \circ f \circ f,\ \dots$

และ $\frac{1}{2}\left((f^{31} \circ (f^{16})^{-1})(x)\right) = 3 - \frac{x}{2}$

(2) g เป็นฟังก์ชันจาก R ไป R โดยที่ $g(1 - \frac{4}{3}x) = 1 + \frac{2}{3}x$

(3) h เป็นฟังก์ชันจาก R ไป R โดยที่ $h(x) = \frac{(f\,o\,g^{-1})(x) + 3f^2(x)}{(g\,o\,f^3)(x)}$

(ก) จงหาค่าของ $h(5)$

(ข) จงหาโดเมน และเรนจ์ของฟังก์ชัน h

2. จงหาจำนวนคำตอบของสมการ $x = 100(\left|\cos\,(x-5)\right| + \frac{1}{20})$

3. จงหาค่าของ $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & n+1 \end{vmatrix}$

4. จากตารางค่าความจริงของประพจน์ $\left[(p \vee q) \vee (r \leftrightarrow s)\right] \wedge (t \to u)$

(ก) มีกี่บรรทัดที่ประพจน์นี้มีค่าความจริงโดยรวมเป็นจริง

(ข) เมื่อประพจน์ $\left[(p \vee q) \vee (r \leftrightarrow s)\right] \wedge (t \to u)$ มีค่าความจริงโดยรวมเป็นจริง มีกี่บรรทัดที่ประพจน์ $\left[(\sim q \to s) \leftrightarrow (p \vee \sim u)\right]$ มีค่าความจริงโดยรวมเป็นเท็จ

5. กำหนดพาราโบลารูปหนึ่งมีจุดยอดที่จุดกำเนิด และสมมาตรกับแกน X เส้นตรง L ผ่านโฟกัสของพาราโบลาโดยทำมุม 60° กับแกน X และตัดพาราโบลา 2 จุด ที่จุด $A(a,\ 2\sqrt{3})$ เมื่อ $a > 0$ และจุด B

จงหาสมการของวงกลมที่มี AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

6. กำหนด $A = \{(x,\ y) \in \mathrm{I} \times \mathrm{I} \,/\, x^3 + y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x + 12y = 84\}$

และถ้า $f : A \to R$ โดยที่ $f((x,\ y)) = \dfrac{x}{y} - (x + y)$

จงเขียน f แบบแจกแจงสมาชิก

ตอนที่สอง จงแสดงวิธีทำอย่างละเอียด (ข้อ 1– 4 ข้อละ 5 คะแนน และข้อ 5–6 ข้อละ 10 คะแนน)

1. กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส, สี่เหลี่ยมผืนผ้า และวงกลมมีเส้นรอบรูปยาวเท่ากัน เท่ากับ L หน่วย จงเปรียบเทียบพื้นที่ของรูปทั้งสาม พร้อมทั้งพิสูจน์ให้เห็นจริง

2. จงหาจำนวนคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $\sqrt{4-x}+x^2 - x^6 = 0$ โดยเขียนกราฟของฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน พร้อมคำอธิบาย

3. ให้ $A = \{\frac{a}{b} / \ a \in R,\ b \in R,\ b \neq 0,\ \frac{3a^2 + 5ab + 2b^2}{b^2} < 0\}$

$B = \{\frac{p}{q} \ / \ p \in R,\ q \in R,\ q \neq 0,\ \frac{2p + q}{p - 3q} \geq 0\}$

$C = \{ x \in R \ / \ (e^{-x^2 \ln 2})\ (\ln\ 625) \leq \ln\ (\log_2 243) + \ln\ (\log_3 7) - \ln\ (\log_2 5) - \ln\ (\log_5 7)\}$

จงหาขอบเขตบนน้อยสุด และขอบเขตล่างมากสุดของเซต $(A \cup B)' \cap C$

4. จงหาคำตอบของสมการ $10^{-6} = (1-(2.08\times 10^{-6}y))^{50}$
เขียนคำตอบในรูป $A\times 10^{n}$ เมื่อ A เป็นจำนวนที่มีทศนิยมสองตำแหน่ง โดยที่ $1<A<10$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก
ถ้ากำหนดค่าในตารางลอการิทึม เป็นดังนี้
ตารางลอการิทึม

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859

5. จงหาตัวเลขที่อยู่ในหลักหน่วยของจำนวน $(25+\sqrt{620})^{17}+(25+\sqrt{620})^{92}$
ถ้ากำหนดให้ $p,\ q$ เป็นจำนวนจริง n เป็นจำนวนเต็มบวก และ r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $0\le r\le n$

$$(p+q)^n = \binom{n}{0}p^n + \binom{n}{2}p^{n-1}q + \binom{n}{0}p^{n-2}q^2 + \ldots + \binom{n}{n}q^n$$

และ $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $n! = (n)(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1)$, $0! = 1$

6. ให้ F_1 และ F_2 เป็นโฟกัสของวงรี $5x^2+9y^2+10x-90y+50=0$ โดยที่ F_2 อยู่ในควอดรันต์ที่ 1
P เป็นจุดบนวงรีเหนือแกนเอก ซึ่ง $PF_2 < PF_1$ และ $P\hat{F}_2F_1$ เป็นมุมแหลม จุด P อยู่ภายในรูปสามเหลี่ยม AF_1F_2
ซึ่งมี $F_1\hat{A}F_2 = A\hat{F}_1P + A\hat{F}_2P$ ต่อเส้น F_2P ออกไปพบเส้นรอบวงของวงกลม ที่ผ่านจุด A, F_1 และ F_2 ที่จุด C

ก) จงพิสูจน์ว่า $P\hat{C}F_1 = P\hat{F}_1C$

ข) จงหาความยาวของ F_2C

ชุดที่สอง สอบวันที่ 24 สิงหาคม พ.ศ. 2546

คำสั่ง **จงแสดงวิธีทำอย่างละเอียด (ข้อ 1– 8 ข้อละ 10 คะแนน รวม 80 คะแนน)**

1. กำหนดให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เส้นแบ่งครึ่งมุม A และมุม B ตัดกันที่ E และเส้นแบ่งครึ่งมุม C และมุม D ตัดกันที่ G $\overline{AE}$ ตัดกับ $\overline{DG}$ ที่ F และ $\overline{CG}$ ตัดกับ $\overline{BE}$ ที่ H จงพิสูจน์ว่า

(ก) $EFGH$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

(ข) พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม $AGED$ เท่ากับพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม $BGEC$

2. ในสามเหลี่ยม ABC ถ้าอัตราส่วน $\cos A : \cos B : \cos C = 2 : 9 : 12$ แล้ว จงหาอัตราส่วน $\tan A : \tan B : \tan C$ (ตอบเป็นจำนวนเต็ม)

3. กำหนดให้ $C(h,\ k)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งวงกลมนี้ผ่านจุด 3 จุด คือ $P(\frac{3}{2},\ -2)$, $Q(-\frac{13}{2},\ 2)$ และ $R(a, b)$ ให้เส้นตรง $6x - 8y - 25 = 0$ สัมผัสวงกลมที่จุด P และทำมุม 30° กับคอร์ด PR

(ก) จงหาระยะที่สั้นที่สุดจากจุด C ไปยังคอร์ด PR

(ข) จงหาพิกัดของจุด R

4. ถ้า a, b, c เป็นรากทั้งสามของสมการ $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$

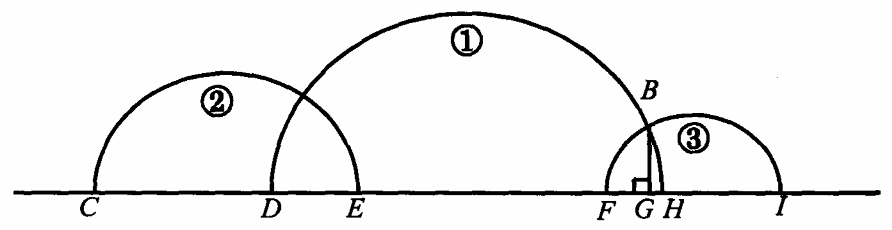
และ p เป็นรากของสมการ $8z = \ln[6016 - 2688(5^k)]$ โดยที่ $k = 2^{-\frac{1}{\log_9 4}} + 3^{-\frac{1}{\log_6 3}}$

จงแสดงว่า $a^3 + b^3 + c^3 = \frac{1}{2}(6e^{2p} - \frac{e^{4p}}{4e^{-p} - e^p})$

5. กำหนดครึ่งวงกลม ①, ② และ ③ ดังรูป โดยพื้นที่ของ ② เท่ากับ $\frac{2}{3}$ เท่าของพื้นที่ของ ① และพื้นที่ของ ③ เท่ากับ $\frac{1}{2}$ เท่าของพื้นที่ของ ② $\overline{DE}$ และ $\overline{FH}$ มีความยาวเป็น $\frac{1}{3}$ เท่าของ $\overline{CE}$ และ $\overline{FI}$ ตามลำดับ

ถ้า $\overline{BG}$ ยาว h และ ① มีรัศมี r ให้ A เป็นจุดบนเส้นรอบวงของ ① ซึ่งทำให้พื้นที่ ΔCBE เท่ากับพื้นที่ ΔHAI ลาก $\overline{AL}$ ตั้งฉากกับ $\overline{CI}$ ที่ L

จงหาความยาวของ LG ในพจน์ของ h และ r



6. จงพิสูจน์ว่า ถ้า a, b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $(a, 4) = 2$ และ $(b, 4) = 2$ แล้ว $(a + b, 4) = 4$

(สัญลักษณ์ (p, q) หมายถึง ห.ร.ม. ของจำนวนเต็ม p และ q)

7. กำหนดให้ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $b > 1$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

จงพิสูจน์ว่า $b^n - 1 \geq n(b-1)$

(แนะ : ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนนับ n ดังนั้น $\forall n \geq 1, P(n)$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ $P(1)$ เป็นจริง และสำหรับจำนวนนับ k ใดๆ ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย)

8. กำหนดให้สามเหลี่ยม EFG เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่ามีความยาวด้านละ a หน่วย แบ่ง $E\hat{F}G$ ออกเป็น 3 มุม ขนาดเท่ากันด้วย $\overline{FC}$ และ $\overline{FI}$ ซึ่งมีความยาวเท่ากัน ให้ $\overline{FC}$ ตัด $\overline{EG}$ ที่จุด D โดยที่ $\overline{CD}$ มีขนาดเป็น $\frac{2}{3}$ เท่าของ $\overline{DF}$ และแบ่ง $C\hat{F}I$ ออกเป็น 3 มุม ขนาดเท่ากันด้วย $\overline{FA}$ และ $\overline{FJ}$ ซึ่งมีความยาวเท่ากัน

ให้ $\overline{FA}$ ตัด $\overline{CI}$ ที่จุด B โดยที่ $\overline{AB}$ มีขนาดเป็น $\frac{2}{3}$ เท่าของ $\overline{BF}$

ถ้าให้ K เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AJ}$ จงหาความยาวของ $\overline{AK}$

๕ กรกฎาคม ร.ศ. ๒๒๒