



การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับชาติ ครั้งที่ 1

วันที่ 2 - 3 พฤษภาคม 2547

ข้อสอบวันแรก

1. กำหนดให้ $\cos 4A = \frac{1}{3}$ เมื่อ $-\frac{\pi}{4} \leq A \leq \frac{\pi}{4}$

จงหาค่าของ $\cos^8 A - \sin^8 A$

2. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง และ $a^6 - 3a^2b^4 = 3$ และ $b^6 - 3a^4b^2 = 3\sqrt{2}$
ค่าของ $a^4 + b^4$ เป็นเท่าไร

3. ให้ u, v, w เป็นรากของ $x^3 - 5x^2 + 4x - 3 = 0$
จงหาสมการพหุนามที่มี u^5, v^5, w^5 เป็นราก

4. จงหาค่าจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

5. กำหนด n เป็นจำนวนนับ

จงหาเซตคำตอบของสมการ $\sum_{k=1}^{2n} \sqrt{x^2 - 2kx + k^2} = |2nx - n - 2n^2|$





6. ให้ $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

จงหาเศษเหลือที่เกิดจากการหาร $f(x^7)$ ด้วย $f(x)$

7. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f(0) = 0$ และ $f(1) = 1$ และ

$$f(n) = 2f(n-1) - f(n-2) + (-1)^n(2n-4) \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็ม } n \geq 2$$

จงหา $f(n)$ ในพจน์ของ n

8. กำหนด $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $f(x + f(y)) = 2x + 4y + 2547$ สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{R}$

จงหา $f(0)$

9. จงหา
$$\sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2}$$

10. จงหาจำนวนวิธีเลือกจำนวนสามจำนวนที่แตกต่างกันจากเซต $\{1, 2, 3, \dots, 3n\}$

โดยผลบวกของสามจำนวนนั้นต้องหารด้วย 3 ลงตัว





11. จงหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ

$$(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 91$$

12. กำหนด n เป็นจำนวนนับ และ $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

จงหาจำนวนฟังก์ชัน $f: A_n \rightarrow A_n$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งมีสมบัติว่า

ถ้า $x < y$ แล้ว $f(x) \geq f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in A_n$

13. จงหาเศษที่ได้จากการหาร $29^{30} + 31^{28} + 28! \cdot 30!$ ด้วย $29 \cdot 31$

14. จงหา ห.ร.ม. ของ $5^{2547} - 1$ กับ $5^{2004} - 1$

15. จงหาจำนวนเต็ม n ที่มากที่สุด ซึ่ง $n \leq 2004$ และ $3^{3n+3} - 27$ หารด้วย 169 ลงตัว

16. จงหาเลขสามหลักสุดท้ายของ $2^{2^{2004}}$





17. จงหาเศษเหลือจากการหาร $1^{2547} + 2^{2547} + 3^{2547} + \dots + 2547^{2547}$ ด้วย 25

18. จงหาจำนวนจริงบวก a, b, c ที่ทำให้ abc มีค่าสูงสุด เมื่อกำหนดให้ $b(a^2 + 1) + c(a + 1) = 8$

19. จงหาจำนวนจริงบวก a, b, c ที่ทำให้ $a + 2b + 3c$ มีค่าสูงสุด
เมื่อกำหนดให้ $9a^2 + 4b^2 + c^2 = 91$

20. เสาสองต้นสูง a หน่วย และ b หน่วยปักตั้งฉากกับพื้นราบ เมื่อโยงเชือกจากจุดยอดเสาแต่ละเสาสู่ไปยังอีกโคนเสาสองต้น จุดที่เชือกทั้งสองตัดกันจะอยู่สูงจากพื้นราบเท่าไร

21. สามเหลี่ยมรูปหนึ่ง รัศมีของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยมยาวเป็น $\frac{7}{2}$ เท่าของรัศมีของวงกลมแนบใน

สามเหลี่ยม ถ้าด้านสองด้านยาว 3 หน่วยและ 7 หน่วย และอีกด้านยาวเป็นจำนวนเต็มหน่วย

แล้ว จงหาความยาวด้านที่เหลือ

วันที่สอบเก่า เดือนนี้ พอศอสองหน้าหน้าสี่

