



ข้อสอบวันที่สอง

1. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีมุม $\angle A = 70^\circ$

เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมตัดกันที่จุด I

ถ้า $CA + AI = BC$ แล้ว จงหามุม B

2. กำหนดให้ $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ เมื่อ \mathbb{Q} เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ โดยที่

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2547 \text{ สำหรับทุก } x, y \in \mathbb{Q} \text{ และ } f(2004) = 2547$$

จงหา $f(2547)$

3. นักเรียน 18 คน ที่สูงต่างกันทั้งหมดยืนเข้าแถวตอนเมื่อเคารพธงชาติ ครูประจำชั้นต้องการให้นักเรียนยืนเรียงตามลำดับความสูง โดยให้นักเรียนที่สูงที่สุดอยู่ท้ายแถว เมื่อครูเดินตรวจแถว หากพบว่านักเรียนที่ยืนติดกันนั้นเรียงลำดับความสูงไม่ถูกต้อง ก็จะทำการสลับตำแหน่งนักเรียนคู่ที่พบนั้น แล้วเดินตรวจเรื่อย ๆ จนกว่านักเรียนจะเรียงลำดับความสูงได้ถูกต้องทั้งหมด

ถ้าครูต้องสลับตำแหน่งนักเรียนทั้งหมด 150 คู่ แล้ว นักเรียนจะเข้าแถวได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี





4. กำหนดให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุม (convex quadrilateral)

จงพิสูจน์ว่า พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD \leq \frac{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2}{4}$

5. จงหาจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมดที่ทำให้ $p^2 + 2543$ มีจำนวนของตัวหารบวกที่แตกต่างกันน้อยกว่า 16 ตัว (เช่น 6 มีตัวหารบวกที่แตกต่างกันทั้งหมด 4 ตัว ได้แก่ 1, 2, 3, 6)

6. กำหนด $a, b, c > 0$ โดยที่ $ab + bc + ca \leq 3abc$

จงพิสูจน์ว่า $a^3 + b^3 + c^3 \geq a + b + c$

วันที่สอบเก่า เดือนนี้ พอศอสองหน้าหน้าสี่

