



การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับชาติ ครั้งที่ 2

วันที่ 2 - 6 พฤษภาคม 2548

ข้อสอบวันแรก

1. $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแนบในวงกลมรัศมี 1 หน่วย โดยที่ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง และ $DC = 4AD$ จงหาระยะ AD

2. $ABCD$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมแนบในวงกลม จากจุด A และจุด B ลากเส้นตั้งฉากกับด้านตรงข้ามที่จุด A' และจุด B' ตามลำดับ และเส้นตั้งฉากทั้งสองตัดกันที่จุด H ถ้า BH ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลม จงหาค่าของ $A'B/AB$

3. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งมีจุด A เป็นจุดยอด และมุมที่ฐานเป็นสองเท่าของมุมที่จุดยอด จงหาค่าของ AB/BC

4. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมแนบในวงกลม ซึ่งมี BC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง ถ้า AB ยาว 3 หน่วย AC ยาว 4 หน่วย และ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม ABC แล้ว จงหาค่าของ $BO \cdot OC$

5. โยงลูกเต๋าลูกหนึ่ง 6 ครั้ง จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่ให้แต้มรวมเท่ากับ 21





6. จงหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ $(x_1 + x_2 + x_3)^2(y_1 + y_2) = 2548$

7. ต้องการเขียน 2548 ในรูปผลบวกของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่สองจำนวนขึ้นไป โดยลำดับที่มีความสำคัญ จะทำได้ทั้งหมดกี่วิธี

8. จัดเรียงสมาชิกในแต่ละล๊อบเซตของ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ที่ไม่ใช่เซตว่าง จากมากไปน้อย ใส่เครื่องหมายบวก และลบสลับกันหน้าสมาชิกแต่ละตัวของล๊อบเซต โดยเริ่มเครื่องหมายบวกหน้าจำนวนที่มากที่สุด ในล๊อบเซตนั้น หาผลบวกของจำนวนเหล่านั้น

เช่น ล๊อบเซต $T = \{7, 3, 2\}$ เราได้ $7 - 3 + 2 = 6$ เป็นผลลัพธ์ของล๊อบเซต T

จงหาผลบวกของผลลัพธ์ของทุกล๊อบเซตของ S

9. จงหาตัวหารร่วมมากของ $\frac{135^{90} - 45^{90}}{90^2}$ กับ 90^2

10. จงหาเศษเหลือที่ได้จากการหาร $\sum_{k=1}^{2005} k^{2005} \cdot 2^{2005}$ ด้วย 2^{2005}





11. จงหาจำนวนเต็มบวก x ที่น้อยที่สุด ซึ่งทำให้ 2^{2548} หาร $x^{2005} + 1$ ลงตัว

12. จงหาว่ามีจำนวนเต็มคู่ n ที่จำนวน ซึ่ง $0 \leq n \leq 100$ และ $5 \mid (n^2 \cdot 2^{2n^2} + 1)$

13. จงหาจำนวนเต็มบวกคือ k ทั้งหมด ที่ทำให้มีจำนวนเต็มบวก m ซึ่ง

$$k + (k + 5) + (k + 10) + \dots + (k + 5(m - 1)) = 1372$$

14. กำหนดฟังก์ชัน $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ โดยที่

$$f(m + n) = f(m) + f(n) - 2mn - 2548 \text{ สำหรับทุก } m, n \in \mathbb{N}$$

ถ้า $f(2548) = -2548$ แล้ว จงหา $f(2)$

15. กำหนดฟังก์ชัน $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่ $f(x + 2y) + 2f(y - 2x) = 3x - 4y + 6$

สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{R}$ จงหา $f(2548)$

16. จงหาผลบวกของรากทั้งหมดของสมการ $(2 - x)^{2005} + x^{2005} = 0$





17. ใ้ให้ $a, b \geq 0$ และนิยาม $a * b = \frac{a + b + 1}{ab + 12}$

จงหาค่า $0 * (1 * (2 * (\dots (2003 * (2004 * 2005)) \dots)))$

18. จงหาค่าของ $\sum_{k=0}^{1273} \frac{1}{1 + \tan^{2548}(\frac{k\pi}{2548})}$

19. กำหนด $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรีสี่ ที่มีสัมประสิทธิ์ของ x^4 เท่ากับ 1 และ $x - k$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ k เมื่อ $k = 1, 2, 3$ จงหาค่า $P(4) + P(0)$

20. กำหนด $a, b, c, d > 0$ และ $36a + 4b + 4c + 3d = 25$

จงหาค่าสูงสุดของ $a b^2 c^3 d^4$

21. ใ้ให้ α, β, γ เป็นจำนวนจริงใดๆ

จงหาค่าต่ำสุดของ $\cos(\alpha - \beta) + \cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha)$

วันที่สิบสอง เดือนนี้ พอศอสองหน้าห้าสี่

