



ข้อสอบวันที่สอง

1. BC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

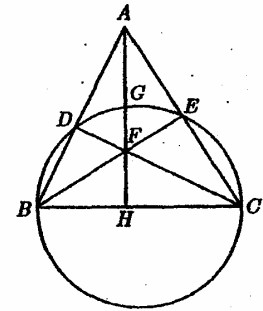
A เป็นจุดภายนอกของวงกลม ซึ่งทำให้เกิดสามเหลี่ยมมุมแหลม ABC

AB และ AC ตัดวงกลมที่จุด D และ E ตามลำดับ

CD ตัด BE ที่จุด F AF ตัดวงกลมที่จุด G

ต่อ AF ไปพบ BC ที่จุด H

จงพิสูจน์ว่า $AH \cdot FH = (GH)^2$



2. S เป็นเซตของจำนวนเต็มที่แตกต่างกันสามจำนวน

จงแสดงว่าต้องมี $a, b \in S$ ซึ่ง $a \neq b$ และ $10 \mid (a^3b - ab^3)$

3. มีฟังก์ชัน $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ซึ่ง $f(f(n)) = 2n$ สำหรับทุกจำนวนนับ n หรือไม่?

ถ้ามีจงยกตัวอย่างฟังก์ชันดังกล่าว หรือมทั้งแสดงให้ เห็นจริงว่าฟังก์ชันนี้สอดคล้องกับสมบัติที่กำหนดให้



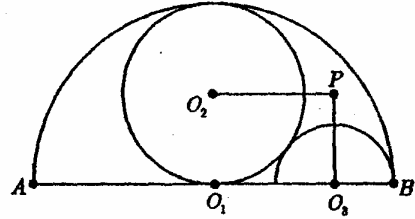


4. ให้ O_1 เป็นจุดศูนย์กลางของครึ่งวงกลมที่มี AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
 O_2 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่แนบในครึ่งวงกลมแรก และสัมผัสกับ AB ที่จุด O_1
 O_3 เป็นจุดบน AB และเป็นจุดศูนย์กลางของครึ่งวงกลมที่สัมผัสสองวงแรก
 P เป็นจุดตัดของเส้นตั้งฉากกับ AB ที่จุด O_3

และเส้นที่ผ่านจุด O_2 และขนานกับ AB

จงแสดงว่า จุด P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่สัมผัส

สามวงแรก



5. ในวันเปิดเทอมวันแรกของชั้น ม.1/1 มีนักเรียนเข้าใหม่ 50 คน ที่ยังไม่มีการรู้จักกันเลย ใจเข้าวันหนึ่ง ครูจัดให้นักเรียนทั้งหมดยืนเรียงแถวหน้ากระดาน และอนุญาตให้นักเรียนได้ทำความรู้จักกับเพื่อนที่ยืนติดกันเท่านั้น ใจไปยืนติดต่อกัน ครูจัดให้นักเรียนทุกคนยืนแถวตอนเรียงหนึ่ง และต้องการให้นักเรียนแต่ละคนมีเพื่อนที่รู้จักกันจากช่วงเข้ายืนอยู่ด้านหน้า (ไม่จำเป็นต้องยืนติดกัน) อย่างน้อยหนึ่งคนเสมอ ครูมีวิธีจัดแถวในตอนที่ใจได้ทั้งหมดกี่วิธี

6. กำหนด a, b, c เป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน

$$\text{จงพิสูจน์ว่า } \left(\frac{2a-b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{2b-c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{2c-a}{c-a}\right)^2 \geq 5$$

วันที่สิบสอง เดือนสี่ พอสองหน้าหน้าสี่

