



การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับชาติ ครั้งที่ 3

วันที่ 8 - 12 พฤษภาคม 2549

ข้อสอบวันแรก

1. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมแบบในวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง

ถ้า $\angle ABC = 70^\circ$, $\angle ACB = 50^\circ$ และเส้นแบ่งครึ่งมุม BA ตัดวงกลมที่จุด D

จงหาขนาดของ $\angle ADO$

2. รูปสามเหลี่ยม ABC มี $AB = 2$, $CA = 3$ และ $BC = 4$

จงหาความยาวรัศมีของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนด้าน BC และสัมผัสด้าน AB และ AC

3. รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีเส้นมัธยฐานทั้งสามยาว 3, 4 และ 5 หน่วย

จงหาความยาวของด้านที่สั้นที่สุดของรูปสามเหลี่ยมนี้

4. ให้ P เป็นจุดภายนอกวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง จากจุด P ลากเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด A และ B ต่อบน BO ไปตัดวงกลมที่จุด C และตัดเส้นที่ต่อจาก PA ที่จุด Q

ถ้า $3QA = 2AP$ จงหาค่าของ $\sin \angle CAQ$





5. ให้ $f: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(m^2 + n^2) = (f(m) - f(n))^2 + f(2mn) \text{ สำหรับทุก } m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

และ $8f(0) + 9f(1) = 2006$

จงหาค่าของ $f(0)$

6. ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ สอดคล้องสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(1) < 0$$

และ $f(\cos(x+y)) = \cos x \cdot f(\cos y) + 2f(\sin x) \cdot f(\sin y)$

สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{R}$

จงหาค่าของ $f\left(\frac{2006}{2549}\right)$

7. ให้ x, y, z เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $x + y + z = 1$

จงหาค่า x ที่ทำให้ $2x^2 + 3y^2 + 4z^2$ มีค่าต่ำที่สุด

8. ให้ a, b, c เป็นคำตอบของสมการ $x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = 0$ และ $s = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

จงหาค่าของ $s^4 - 18s^2 - 8s$





9. จงหาจำนวนเต็มที่มีค่ามากที่สุด และมีค่าไม่เกิน $\frac{2549^3}{2547 \cdot 2548} - \frac{2547^3}{2548 \cdot 2549}$

10. จงหาเศษจากการหาร $(26!)^{26} + (27!)^{27}$ ด้วย 29

11. ให้ p_n เป็นจำนวนเฉพาะตัวที่ n

จงหาเศษจากการหาร $\prod_{n=1}^{2549} 2006^{p_n^2 - 1}$ ด้วย 13

12. ให้ $a_n = 2^{3n-1} + 3^{6n-2} + 5^{6n-3}$

จงหา $\gcd(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$

13. จงหาเศษจากการหาร $\underbrace{111 \dots 11}_{1862 \text{ ตัว}}$ ด้วย 2006



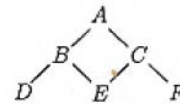


14. จงหาจำนวนนับ n ที่น้อยที่สุด ซึ่ง $2549 \mid (n^{2545} - 2541)$

15. มีจำนวนนับ $n < 2549$ ที่จำนวนที่ทำให้ $x^2 + x - n$ มีรากเป็นจำนวนเต็ม

16. จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะสร้างเซต A, B, C ที่ $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, \dots, 2549\}$

17. มีคน 6 คน ที่มีน้ำหนักแตกต่างกันหมด ต้องการต่อตัวตั้งรูป
โดยคนที่น้ำหนักมากกว่าห้ามอยู่เหนือคนที่น้ำหนักน้อยกว่า
จะมีวิธีต่อตัวได้ทั้งหมดกี่วิธี



18. ในเดือนพฤษภาคม ตำรวจทางหลวงต้องการตั้งด่านตรวจจับความเร็ว 10 วัน โดยจะไม่วางด่าน 2 วันติดกัน จะจัดวันตั้งด่านได้ทั้งหมดกี่วิธี

วันที่หนึ่ง เดือนสาม พอสองหน้าหน้าสี่

