



การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับชาติ ครั้งที่ 4

วันที่ 4 - 9 พฤษภาคม 2550

ข้อสอบวันแรก

1. ในวงกลม O รัศมี OA ตั้งฉากกับรัศมี OB คอร์ด AC ตัด OB ที่จุด E ทำให้ส่วนโค้ง AC ยาวเป็น $\frac{1}{3}$ ของเส้นรอบวงของวงกลม ลาก CD ตั้งฉากกับ OB ที่จุด D
ถ้า AC ยาวกว่า OD อยู่ 2 หน่วยแล้ว จงหาความยาวของ AC

2. รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ แขนงในวงกลม ส่วนโค้ง AB ยาวเท่ากับส่วนโค้ง BC
ถ้า $AD = 6, BD = 4$ และ $CD = 1$ แล้ว จงหาความยาวของ AB

3. สามเหลี่ยม ABC มี B เป็นมุมฉาก มีวงกลมสัมผัสด้าน AB ที่จุด E และสัมผัสด้าน AC วงกลมอีกวงหนึ่งสัมผัสวงกลมวงแรก และด้าน AB และ AC
ถ้า $AB = \sqrt{3}$ และ $BC = 3$ แล้ว จงหารัศมีของวงกลมวงที่สอง

4. สามเหลี่ยม ABC มี $AC = 16$ และ $BC = 12$ จุด E และ F อยู่บนด้าน AC และ BC ตามลำดับ โดยที่ $CE = 3CF$
ให้ M เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB ลาก EF ตัด CM ที่จุด G
จงหา $EG : GF$





5. สามเหลี่ยม ABC มี A เป็นมุมฉาก จุด D อยู่บน AC

ลากเส้นตรงจากจุด A ไปตั้งฉากกับ BC ที่จุด F

ถ้า $BD = DC = CF = 2$ แล้ว จงหาความยาวของ AC

6. ให้ M เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง BC และ A เป็นจุดใดๆ ที่ทำให้ $\angle MAC = 20^\circ$

ถ้า $\angle ABC$ มีขนาดมากที่สุดแล้ว จงหา $\frac{BC}{BA}$

7. ถ้า a, b, c เป็นจำนวนจริงข้อ ซึ่ง

$$a + b + c = 1, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 2 \quad \text{และ} \quad a^3 + b^3 + c^3 = 3$$

แล้ว จงหาค่าของ $a^4 + b^4 + c^4$

8. ถ้า x_1, x_2, \dots, x_{24} เป็นรากทั้งหมดของสมการ $x^{24} + 7x - 6 = 0$

แล้ว จงหาค่าของ $\sum_{k=1}^{24} \frac{x_k}{x_k - 1}$





9. ถ้า $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f(x^2 + x + 3) + 2f(x^2 - 3x + 5) = 6x^2 - 10x + 17$

สำหรับทุกจำนวนจริง x

จงหาค่าของ $f(85)$

10. จงหาค่าของเต็มบวก n ที่น้อยที่สุด ที่ทำให้สมการ $\sqrt{3}z^{n+1} - z^n - 1 = 0$

มีรากที่มีขนาดหนึ่งหน่วย

11. จงหาค่าของฟังก์ชัน $f: \{1, 2, \dots, 2550\} \rightarrow \{61, 80, 84\}$ ซึ่ง $\sum_{k=1}^{2550} f(k)$ หารด้วย 3 ลงตัว

12. มนุษย์ต่างดาวมี 4 เท้า ต้องการใส่ถุงเท้า และรองเท้าให้ครบทั้ง 4 เท้า

อยากทราบว่า จะมีลำดับในการใส่ถุงเท้า และรองเท้าให้มนุษย์ต่างดาวได้แตกต่างกันกี่วิธี

13. ให้ $S = \{1, 2, \dots, 8\}$

จงหาค่าของวิธีเลือกเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างสองเซตของ S ซึ่งไม่มีสมาชิกร่วมกัน





14. จงหาค่าของ $\sum_{k=84}^{8000} \binom{k}{84} \binom{8084-k}{84}$ ในรูป $\binom{a}{b}$ โดยที่ a และ b เป็นตัวเลข

15. จงหาเศษจากการหาร $(222!)^{111} + (111)^{222!} + (111!)^{222} + (222)^{111!}$ ด้วย 2007

16. จงหาจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่มีจำนวนตัวหารที่แบ่งบวกเท่ากับ 24 ตัว

17. จงหาผลคูณของจำนวนเต็ม n ทั้งหมดที่ทำให้ $n^2 + 59n + 881$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

18. จงหาเศษจากการหาร $\sum_{k=2}^{2550} p_k^{4-1}$ ด้วย 2550 เมื่อ p_k เป็นจำนวนเฉพาะตัวที่ k

วันที่สอบ เดือนสอง พอสองหน้าห้า

