



## ข้อสอบวันที่สอง

1. จงหาฟังก์ชัน  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ทั้งหมด ซึ่ง

$$\sum_{i=1}^{2549} f(x_i + x_{i+1}) + f\left(\sum_{i=1}^{2550} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{2550} f(2x_i)$$

สำหรับทุกจำนวนจริง  $x_1, x_2, \dots, x_{2550}$

2. นักเรียนหญิง  $n$  คน และนักเรียนชาย  $n$  คน ในชั้น ม. 1/1 อยู่ในงานปาร์ตี้ที่มีการเต้นรำแห่งหนึ่ง ในแต่ละเพลงจะมีนักเรียนชาย-หญิงจับคู่กันไปเต้นรำอย่างน้อยหนึ่งคู่ นักเรียนทุกคนที่ขึ้นไปเต้นรำจะได้รับพวงมาลัยคนละหนึ่งพวงเมื่อจบเพลงเสมอ ถ้ามีการเต้นรำทั้งหมด  $m$  เพลง

จงแสดงว่าสำหรับทุกจำนวนนับ  $k \leq n$  จะต้องมีกลุ่มนักเรียนที่ประกอบด้วยชาย  $k$  คน และหญิง  $n - k$  คน ซึ่งได้รับพวงมาลัยรวมกันอย่างน้อย  $m$  พวง

3. วงกลมสองวงตัดกันที่จุด  $X$  และ  $Y$  เส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสองตัดวงกลมแรก ที่จุด  $A$  และ  $C$  และตัดวงกลมที่สองที่จุด  $B$  และ  $D$  โดยที่ จุด  $B$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $AC$  และ  $C$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $BD$  คอร์ดร่วม  $XY$  ตัด  $BC$  ที่จุด  $P$

ให้จุด  $O$  เป็นจุดใดๆ บน  $XP$  ที่อยู่ระหว่าง  $X$  กับ  $P$  ต่อบ  $CO$  พบวงกลมแรกที่จุด  $M$  และต่อบ  $BO$  พบวงกลมที่สองที่จุด  $N$  ต่อบ  $AM$  และ  $DN$  ออกไปพบกันที่  $Z$

จงพิสูจน์ว่า  $X, Y$  และ  $Z$  อยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกัน





4. จงหาจำนวนเฉพาะ  $p$  ทั้งหมดที่ทำให้  $\frac{2^{p-1} - 1}{p}$  เป็นกำลังสองสมบูรณ์

5. ชั้น ม. 1 มีนักเรียนชาย 229 คน และนักเรียนหญิง 271 คน แบ่งเป็น 10 ห้อง ห้องละ 50 คน  
นักเรียนแต่ละห้องมีเลขที่ 1 ถึง 50 ครูต้องการจัดทีมวิ่งผลัดหนึ่งทีม โดยให้นักเรียนหญิง 1 คน และชาย 3 คน  
หรือนักเรียนหญิง 3 คน และชาย 1 คน และมีเงื่อนไขเพิ่มเติมว่า นักเรียนสี่คนนี้จะมาจากสองห้อง ห้องละสองคนที่เรียงที่  
ตรงกัน (เช่น นักเรียนเลขที่ 2 และ 15 จากห้อง ม.1/1 และ ม.1/3)

จงแสดงว่ามีวิธีตั้งทีมวิ่งผลัดเป็นจำนวนกี่

6. รูปสามเหลี่ยมมุมป้านหนึ่งมีเส้นรอบรูปยาว 28

ถ้าวงกลมแนบในรัศมี  $r$  และระยะจากจุดศูนย์กลางวงกลมแนบในไปยังจุดยอดทั้งสามเป็น  $s_a, s_b$  และ  $s_c$

แล้ว จงแสดงว่า 
$$\frac{3}{4} + \frac{r}{s_a} + \frac{r}{s_b} + \frac{r}{s_c} \leq \frac{s^2}{12r^2}$$

วันที่สิบ เดือนสอง พอสองหน้าห้าสิ

