# การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับชาติ ครั้งที่ 5

**วันที่ 4 - 9 พฤษภาคม 2551**

## ข้อสอบวันแรก

1. ให้ $ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุม $B\hat{A}C = 90^\circ$ และ $A\hat{B}C = 60^\circ$
ให้ $E$ อยู่บน $BC$ ที่สอดคล้อง $BE : EC = 3 : 2$
จงหา $\cos\theta$ เมื่อ $\theta = C\hat{A}E$

2. ให้ $AD$ เป็นคอร์ดร่วมของวงกลม $O_1$ และ $O_2$ ซึ่งมีรัศมีเท่ากัน
ให้จุด $B$ และ $C$ อยู่บนวงกลม $O_1$ และ $O_2$ ตามลำดับ ที่ทำให้ $D$ อยู่บน $BC$
จงหา $\frac{r_1}{r_2}$ เมื่อ $r_1$ และ $r_2$ เป็นรัศมีของวงกลมแนบในของสามเหลี่ยม $ABD$ และ $ACD$ ตามลำดับ
เมื่อกำหนดให้ $AB = 15$, $AD = 13$ และ $BC = 18$

3. จงหาจำนวนจริงบวก $x$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ

$$x + \left[\frac{x}{3}\right] = \left[\frac{2x}{3}\right] + \left[\frac{3x}{5}\right]$$

เมื่อ $[x]$ หมายถึง จำนวนเต็มที่มากที่สุดที่มีค่าน้อยกว่า หรือเท่ากับ $x$

4. จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - \sqrt{2}bc} \geq \sqrt{a^2 + c^2}$
สำหรับทุกจำนวนจริง $a, b, c > 0$

5. ให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2008 ที่มีรากทุกตัวเป็นจำนวนจริง และมีสมบัติว่า
ถ้า $P(\alpha) = 0$ แล้ว $P(\alpha + 1) = 1$
จงพิสูจน์ว่า $P(x)$ ต้องมีรากซ้ำ

6. ถ้า $f : R \to R$ เป็นฟังก์ชันซึ่งสอดคล้องกับ

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| < 1 \text{ สำหรับทุก } x, y \in R$$

จงแสดงว่า $\left| f\left(\frac{x}{2008}\right) - \frac{f(x)}{2008} \right| < 1$ สำหรับทุก $x \in R$

7. ถ้า $m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $m^2 + n^2 = 3789$ และ $(m, n) + [m, n] = 633$ แล้ว จงหาค่าของ $m + n$

8. จงพิสูจน์ว่า $2551 \cdot 543^n - 2008 \cdot 7^n$ ไม่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$

9. จงหาจำนวนคู่อันดับ $(A, B)$ ทั้งหมดโดยที่ $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \ldots, 10\}$

10. ถ้าเติมจุด 17 จุด บนด้านของสามเหลี่ยม $ABC$ รวมกับจุดยอดของสามเหลี่ยมเป็นทั้งหมด 20 จุด แล้ว จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากจุด 20 จุดนี้จะมีได้มากที่สุดกี่รูป

**วันที่สิบหก เดือนหนึ่ง พอศอสองห้าห้าสี่**