



ข้อสอบวันที่สอง

1. กำหนดให้ P เป็นจุดภายในของวงกลม ω ลากเส้นจากจุด P มาสัมผัส ω ที่จุด A และจุด B ให้จุด M และ N เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AP และ AB ตามลำดับ
ต่อ MN ไปตัด ω ที่จุด C โดยที่จุด N อยู่ระหว่าง M และ C ลาก PC ไปตัด ω ที่จุด D
และต่อ ND ไปตัด PB ที่จุด O
จงพิสูจน์ว่า $MNOP$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

2. จงหาจำนวนเต็มบวก N ทั้งหมดที่สอดคล้องสมการต่อไปนี้

(i) N มีตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะที่ต่างกันอย่างน้อยสองจำนวน

และ (ii) $N = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ โดยที่ $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ เป็นตัวประกอบที่มีค่าน้อยสุด

4. ตัวประกอบของ N

3. นิยาม $a_n = n(n+1)$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{n^{a_1}} + \frac{1}{n^{a_3}} + \frac{1}{n^{a_5}} + \dots + \frac{1}{n^{a_{2n-1}}} \geq n^{\frac{a_{3n+2}}{a_{3n+1}}}$$





4. กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า

$$\binom{2n+1}{1} - \binom{2n+1}{3} 2008 + \binom{2n+1}{5} 2008^2 - \dots + (-1)^n \binom{2n+1}{2n+1} 2008^n$$

หารด้วย 19 ไม่ลงตัว

5. ครูจัดแถวนักเรียนชั้น ม. 1/1 ซึ่งประกอบด้วยนักเรียนชาย m คนและนักเรียนหญิง n คน ให้นักเรียนเรียงเป็นแถวหน้ากระดาน โดยให้นักเรียนเพศเดียวกันที่ยืนติดกันจับมือกันได้แต่จะไม่มีนักเรียนจับมือระหว่างนักเรียนต่างเพศ จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของจำนวนการจับมือ เมื่อพิจารณาวิธีการจัดแถวที่เป็นไปได้ทั้งหมด

6. ให้ $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้อง

$$(f(xy))^2 = f(x^2)f(y^2) \text{ สำหรับทุกจำนวนจริงบวก } x \text{ และ } y \text{ ซึ่ง } x^2y^3 > 2008$$

จงพิสูจน์ว่า $(f(xy))^2 = f(x^2)f(y^2)$ สำหรับทุกจำนวนจริงบวก x และ y

วันที่สอบหก เดือนหนึ่ง พอสองหน้าห้าสิ

