



การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับชาติ ครั้งที่ 6

วันที่ 26 - 30 เมษายน 2552

ข้อสอบวันแรก

1. ให้ $S \subset N$ เป็นเซตที่มีสมบัติว่า

“ถ้า $a, b \in S$ และ $a \neq b$ แล้ว $a + b$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์”

จงหาจำนวนสมาชิกที่มากที่สุดที่ไปเข้าไปได้ของ S เมื่อทราบว่า $2009 \in S$ และ $2087 \in S$

2. ให้ k และ n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $k < n$

จงหาจำนวนเซตย่อยของ $\{1, 2, \dots, n\}$ ที่ผลต่างของสมาชิกค่ามากที่สุด และสมาชิกค่าน้อยสุดเท่ากับ k

3. ห้อง ม. 1/1 มีนักเรียนทั้งหมด 19 คน โดยมีวิธีเดาเป็นหัวหน้าห้อง นักเรียนในห้องต้องการตั้งชมรม โดยที่แต่ละชมรมต้องมีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งคน และนักเรียนแต่ละคนอาจอยู่ได้มากกว่าหนึ่งชมรม นอกจากนี้สองชมรมใดๆ ต้องมีสมาชิกต่างกันอย่างน้อยหนึ่งคน

ถ้าแต่ละชมรมที่มีวิธีเดาอยู่มีจำนวนสมาชิกเป็นจำนวนคี่แล้ว นักเรียนห้องนี้จะตั้งชมรมได้อย่างมากที่สุดกี่ชมรม

4. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมี D เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC

จุด E และ F เป็นจุดบนด้าน AC โดยที่ $AF = FE = EC$

ให้ AD ตัด BE และ BF ที่จุด G และ H ตามลำดับ

จงหาอัตราส่วนระหว่างพื้นที่สามเหลี่ยม BGH กับพื้นที่สามเหลี่ยม ABC

5. จงหาฟังก์ชัน $f : Z \rightarrow Z$ ทั้งหมด ซึ่ง

$$f(x+y+2x+2y-1) = f(x)f(y) + f(y) + x - 2 \text{ สำหรับทุก } x, y \in Z$$





6. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่ง $AB > AC$ และวงกลมแนบในสัมผัสด้าน BC ที่จุด D ให้ DE เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมนี้ และ F เป็นจุดตัดของเส้นตรง AE กับด้าน BC จงหาอัตราส่วนระหว่างพื้นที่สามเหลี่ยม DEF กับพื้นที่สามเหลี่ยม ABC ในรูปของความยาวด้านทั้งสาม

7. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

สำหรับแต่ละจำนวนนับ n กำหนดให้ $S_n = a^n + b^n + c^n$

ถ้า S_1, S_2, S_3 เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $6 \mid (5S_1 - 3S_2 - 2S_3)$

แล้ว จงแสดงว่า S_n เป็นจำนวนเต็มสำหรับทุกจำนวนนับ n

8. ให้ a, b และ c เป็นความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง

จงพิสูจน์ว่า $\frac{2a(2a-s)}{b+c} + \frac{2b(2b-s)}{a+c} + \frac{2c(2c-s)}{a+b} \geq s$ โดยที่ $s = \frac{a+b+c}{2}$

9. รูปสามเหลี่ยม ABC มีจุด D และจุด E เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC และ AC ตามลำดับ

ให้ P เป็นจุดตัดของ AD และ BE

ถ้า $\angle CAD = 15^\circ$ และ $\angle APB = 60^\circ$ แล้ว $\frac{AB}{BC}$ มีค่าเท่าใด

10. ให้ $p \geq 5$ เป็นจำนวนเฉพาะ

ถ้า $\frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ ซึ่ง $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{(p-1)^2} = \frac{a}{b}$

แล้ว จงแสดงว่า $p \mid a$

วันที่สิบสอง เดือนสี่ พอสองหน้าหน้าสาม

