



## ข้อสอบวันที่สอง

1. ให้  $a, b$  เป็นจำนวนเต็ม และ  $p$  เป็นจำนวนเฉพาะ

สำหรับจำนวนนับ  $k$  ใดๆ กำหนด  $A_k = \{n \in \mathbb{N} / p^k \mid (a^n - b^n)\}$

จงแสดงว่า ถ้า  $A_1 \neq \emptyset$  แล้ว  $A_k \neq \emptyset$  สำหรับทุกจำนวนนับ  $k$

2. มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  ซึ่ง

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \text{สำหรับทุกจำนวนนับ } x \text{ และ } y \text{ หรือไม}$$

3. ให้  $ABCD$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีสมบัติว่า

$$MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD \quad \text{เมื่อ } M \text{ เป็นจุดตัดของเส้นทแยงมุม } AC \text{ และ } BD$$

ถ้าเส้นแบ่งครึ่ง  $\angle ACD$  ตัดรังสี  $\overrightarrow{BA}$  ที่จุด  $K$

แล้ว จงพิสูจน์ว่า  $BC = DK$  ก็ต่อเมื่อ  $AB \parallel CD$





4. ให้  $k$  เป็นจำนวนนับ

จงแสดงว่ามีจำนวนนับ  $m$  และ  $n$  เป็นจำนวนเฉพาะที่สอดคล้องกับสมการ  $(m - n)^2 = kmn + m + n$

5. ซึ่งมี 1 มีนักเรียนชาย 80 คน และนักเรียนหญิง 80 คน ในวันจันทร์ถึงวันศุกร์ หนึ่งสัปดาห์ก่อนสอบปลายภาค ครูมีหนังสือ 16 เล่ม ให้นักเรียนยืมไปอ่านที่บ้าน 1 คิม และต้องนำมาคืนในตอนเช้าของวันรุ่งขึ้นทันที โดยที่นักเรียนแต่ละคนจะมีสิทธิ์ยืมหนังสือได้เพียงเล่มเดียว และเพียงครั้งเดียวเท่านั้น (จะไม่ยืมเลยก็ได้)

จงแสดงว่าจะต้องมีวันอยู่สองวัน และหนังสืออยู่สองเล่มที่

(1) ไม่มีนักเรียนคนใดยืมหนังสือสองเล่มในวันนั้นเลย หรือ

(2) มีนักเรียน 4 คน ซึ่งเป็นเพศเดียวกันหมด ที่ได้ยืมหนังสือสองเล่มในวันนั้น

6. จงหาพหุนามทั้งหมดในรูป

$$P(x) = (-1)^n x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n \text{ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์ต่อไปนี้}$$

(1)  $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\} = \{0, 1\}$

และ (2)  $P(x)$  มีรากทั้งหมดเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน

วันที่สิบสอง เดือนสี่ พอสองหน้าห้าสาม

