การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับชาติ ครั้งที่ 7

วันที่ 26 - 30 เมษายน 2553

ข้อสอบวันแรก

เวลา 3 ชั่วโมง ข้อละ 2 คะแนน

1. จงหาจำนวนวิธีใส่ลูกบอลที่เหมือนกัน 11 ลูก ลงกล่อง 5 ใบ ที่มีขนาดต่างกันหมด โดยที่แต่ละกล่องต้องมีลูกบอลอย่างน้อย 1 ลูก และผลรวมของจำนวนลูกบอลในกล่องใบใหญ่สุด และใบเล็กสุด ต้องไม่น้อยกว่าผลรวมของจำนวนลูกบอลในกล่อง 3 ใบที่เหลือ

2. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่ง $AB = AC$
วงกลมวงหนึ่งผ่านจุด B และจุด C และตัดด้าน AB และ AC ที่จุด D และจุด E ตามลำดับ
ให้ F เป็นจุดบนวงกลมวงนี้ ซึ่งทำให้ $EF \perp BC$
ถ้า $BC = x$, $CF = y$ และ $EF = z$
แล้ว จงหาความยาวของ DF ในรูปของ x, y, z

3. จงแสดงว่า มีจำนวนเต็มบวก n อยู่มากมายเป็นอนันต์จำนวนที่ทำให้

$$\underbrace{2555\ldots5}_{n \text{ ตัว}}53 \text{ หารด้วย } 2553 \text{ ลงตัว}$$

4. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งมีจุด M และจุด N อยู่บนด้าน AB และ AC ตามลำดับ โดยที่ $AN = BM$ และ $3MB = AB$
ถ้าจุด O เป็นจุดตัดระหว่าง CM และ BN แล้ว จงหาขนาดของ $\angle AOB$

5. ในการแข่งขันปิงปองแบบพบกันหมดของนักกีฬาจำนวน 2010 คน โดยผลการแข่งขันเป็นชนะ หรือแพ้เท่านั้น สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, 2010$
ให้ a_i แทนจำนวนครั้งที่แข่งขันชนะของนักกีฬาคนที่ i และ
b_i แทนจำนวนครั้งที่แข่งขันแพ้ของนักกีฬาคนที่ i
จงแสดงว่า $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2010}^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_{2010}^2$

6. ถ้าฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้องสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(3x + y) + f(3x - y) = f(x + y) + f(x - y) + 16f(x) \text{ สำหรับทุก } x, y \in \mathbb{R}$$

แล้ว จงแสดงว่า $f(-x) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$

7. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก

จงแสดงว่า $\dfrac{a^5}{bc^2} + \dfrac{b^5}{ca^2} + \dfrac{c^5}{ab^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$

8. สำหรับจำนวนเต็ม x และ y ใดๆ

ให้ $d(x, y) \in \{0, 1, 2, \ldots, 1276\}$ และ $(x - y)^2 \equiv (d(x, y))^2 \pmod{2553}$

จงแสดงว่า ทุกสับเซต S ของเซตของจำนวนเต็ม ซึ่ง S มีสมาชิกอย่างน้อย 70 ตัว จะต้องมี $m, n \in S$ ซึ่ง $d(m, n) \leq 36$

9. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงที่ทำให้รากทุกตัวของสมการ

$$2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

จงหารากที่มีค่าน้อยที่สุด

10. จงหาจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมด ที่ทำให้ $\dbinom{100}{p} + 7$ หารด้วย p ลงตัว

วันที่ยี่สิบเก้า เดือนสี่ พอศอสองห้าห้าสาม