



ข้อสอบวันที่สอง

เวลา 4 ชั่วโมง ข้อละ 7 คะแนน

1. จงแสดงว่า สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก x จะมี $y \in \{2, 5, 13\}$ ที่ทำให้ $xy - 1$ ไม่เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์

2. กระทรวงศึกษาธิการจัดกิจกรรมโดยสุ่มเลือกนักเรียนชั้น ม.1 จำนวน 2010 คน จาก 5 ภูมิภาคทั่วประเทศ เพื่อให้ให้นักเรียนคู่ใดๆ เลือกถกปัญหาพร้อมกันจำนวน 1 หัวข้อ จากปัญหา 3 หัวข้อ คือ

ปัญหาด้านการเมือง ปัญหาด้านเศรษฐกิจ และปัญหาด้านสังคม

จงแสดงว่า จะมีนักเรียน 3 คน ซึ่งเกิดเดือนเดียวกัน เป็นเพศเดียวกัน มาจากภูมิภาคเดียวกัน และนักเรียนทุกๆ คู่หนึ่ง 3 คนนี้ เลือกถกปัญหาพร้อมกันเ็นหัวข้อเดียวกันหมด

3. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า ที่มี $AB < BC < CA$

ให้ AD ตั้งฉากกับเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุม B ที่จุด D และ

AE ตั้งฉากกับเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุม C ที่จุด E

ถ้าเส้นตรง DE ตัดด้าน AB และ AC ที่จุด M และ N ตามลำดับ

แล้ว จงแสดงว่า $\frac{AB + AC}{BC} = \frac{DE}{MN} + 1$





4. สำหรับ $i = 1, 2$ ให้ $A_i B_i C_i$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้าน a_i, b_i, c_i และส่วนสูง p_i, q_i, r_i (p_i, q_i, r_i เป็นส่วนสูงที่ลากจากจุดยอด A_i, B_i, C_i ตามลำดับ)

$$\text{ถ้า } a_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, b_3 = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, c_3 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

แล้ว จงแสดงว่า a_3, b_3, c_3 เป็นความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง

$$\text{และ } p_3^2 \geq p_1^2 + p_2^2, q_3^2 \geq q_1^2 + q_2^2, r_3^2 \geq r_1^2 + r_2^2$$

(นิยามส่วนสูง p_3, q_3, r_3 ในทำนองเดียวกับ p_1, q_1, r_1 และ p_2, q_2, r_2)

5. จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมด ซึ่ง

$$f(x - t, y) + f(x + t, y) + f(x, y - t) + f(x, y + t) = 2010$$

สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{R}$ และทุก $t \neq 0$

6. จงแสดงว่าไม่มีจำนวนเฉพาะ p, q, r ซึ่ง $p > r$ และ $q > r$ ที่ทำให้ $pq \mid (r^p + r^q)$

วันที่ปีสิบเก้า เดือนสี่ พอสองหน้าห้าสาม

