การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับชาติ ครั้งที่ 8

วันที่ 2 - 6 พฤษภาคม 2554

<u>ข้อสอบวันแรก</u>

วันอังคารที่ 3 พฤษภาคม 2554 **เวลา 9.00-13.00 น.**

ข้อสอบจำนวน 6 ข้อ ข้อละ 7 คะแนน

1. ให้ $n \geq 3$ เป็นจำนวนเต็มบวก และให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง

$$p \mid n! \text{ และ } q \mid ((n-1)! - 1)$$

จงพิสูจน์ว่า $p < q$

2. จงหาฟังก์ชัน $f : N \to N$ ทั้งหมด ซึ่ง

$f(2m + 2n) = f(m) \cdot f(n)$ สำหรับทุกจำนวนนับ m และ n

3. กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งมีมุม C เป็นมุมฉาก

ให้จุด D เป็นจุดภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC (จุด D ไม่อยู่บนด้านของรูปสามเหลี่ยม)

เส้นตรง $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BD}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ตัดด้าน BC, AC และ AB ที่จุด P, Q และ R ตามลำดับ

ให้ M เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน PQ

ถ้า $\angle BRP = \angle PRC$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $MR = MC$

4. โรงเรียนนานาชาติแห่งหนึ่ง มีนักเรียนชั้น ม. 1 จำนวน 900 คน ในจำนวนนี้มีนักเรียนชายชาวต่างชาติ 59 คน และนักเรียนหญิงชาวต่างชาติ 59 คน ครูแบ่งนักเรียนทั้งหมดออกเป็น 30 ห้อง ห้องละเท่าๆ กัน และในแต่ละห้องจะกำหนดเลขที่ 1 ถึง 30 ให้กับนักเรียน โดยต้องสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้ อย่างน้อยหนึ่งข้อ

(i) นักเรียนชายชาวต่างชาติสองคนใดๆ ในห้องเดียวกัน ไม่มีเลขที่ติดกัน

(ii) นักเรียนเลขที่ 1 ของทุกห้องเป็นเพศชาย

จงพิสูจน์ว่า มีห้องเรียนสองห้อง ที่แต่ละห้องมีนักเรียนชาวต่างชาติสองคน ซึ่งผลต่างของเลขที่ มีค่าเท่ากัน และนักเรียนทั้งสี่คนนี้เป็นเพศเดียวกัน

5. จงหาจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมด ซึ่ง $n = (d(n))^4$ เมื่อ $d(n)$ คือจำนวนตัวหารบวกทั้งหมดของ n

6. สำหรับ $0 \leq x_1, x_2, \ldots, x_{2011} \leq 1$ ใดๆ

จงหาค่าสูงสุดของ $\sum_{i=1}^{2011}(x_i - m)^2$ เมื่อ $m = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2011}}{2011}$

วันที่สี่ เดือนห้า พอศอสองห้าห้าสี่