



การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับชาติ ครั้งที่ 8

วันที่ 2 - 6 พฤษภาคม 2554

ข้อสอบวันที่สอง

วันพุธที่ 4 พฤษภาคม 2554

เวลา 9.00-13.00 น.

ข้อสอบจำนวน 6 ข้อ ข้อละ 7 คะแนน

7. ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวก

ถ้าสมการ $x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx = 1$ มีรากทุกตัวเป็นจำนวนจริง

แล้ว จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \leq \frac{3}{5}$

8. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC มีจุด G เป็นจุด centroid

ถ้าเส้นตรง \overline{AE} เป็นเส้นสัมผัสวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABG

แล้ว จงพิสูจน์ว่า $AB + BC \leq 2AC$

9. จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n > 1$





10. มีฟังก์ชัน $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ซึ่ง

$$f(m + f(n)) = f(m) + f(n) + f(n + 1) \text{ สำหรับทุก } m, n \in \mathbb{N} \text{ หรือไม่}$$

11. รูปสามเหลี่ยม ABC มีวงกลมแนบใน สัมผัสด้าน BC, CA และ AB ที่จุด X, Y และ Z ตามลำดับ ให้ I_a, I_b และ I_c เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบนอกของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่อยู่ตรงข้ามมุม A, B และมุม C ตามลำดับ

จงพิสูจน์ว่า จุด incenter ของรูปสามเหลี่ยม ABC , จุด centroid ของรูปสามเหลี่ยม $I_a I_b I_c$ และจุด orthocenter ของรูปสามเหลี่ยม XYZ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

หมายเหตุ

จุด incenter ของรูปสามเหลี่ยม คือจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม

จุด centroid ของรูปสามเหลี่ยม คือจุดตัดของเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม

จุด orthocenter ของรูปสามเหลี่ยม คือจุดตัดของเส้นส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม

12. มีเก้าอี้หมายเลข 1 ถึง 7662 วางเรียงเป็นวงรอบคู่มือธงชัยงใหม่ ครูจัดกิจกรรมให้นักเรียนชั้น ม.1, ม.2 และ ม.3 ระดับชั้นละ 2554 คน ซึ่งนักเรียนแต่ละคนถือบอลชนิดต่างๆ คนละ 1 ลูก โดยที่นักเรียนชั้น ม.1 ถือลูกฟุตบอล นักเรียนชั้น ม.2 ถือลูกบาสเกตบอล และนักเรียนชั้น ม.3 ถือลูกวอลเลย์บอล และนั่งเก้าอี้ตามป้ายบอกระดับชั้นที่ครูนำไปติดไว้บนเก้าอี้ โดยคนละระดับชั้นกันไป

ครูให้สัญญาณเพื่อให้นักเรียนส่งบอลไปรอบวงเรื่อยๆ โดยในการให้สัญญาณแต่ละครั้ง นักเรียนทุกคนจะส่งบอลในมือให้กับนักเรียนที่นั่งทางซ้ายมือของตนพร้อมๆ กัน

การติดป้ายบอกระดับชั้นบนเก้าอี้ทุกตัว จะเรียกว่า “หลินปิง” ก็ต่อเมื่อ หลังจากที่ครูส่งสัญญาณไปพักหนึ่ง แล้วพบว่านักเรียน ม.1 ทุกคนถือลูกวอลเลย์บอล นักเรียน ม.2 ทุกคนถือลูกฟุตบอล และนักเรียน ม.3 ทุกคนถือลูกบาสเกตบอลได้

จงหาจำนวนวิธีในการติดป้ายแบบ “หลินปิง” บนเก้าอี้เหล่านี้

วันที่... เดือน... พอสองหน้าหน้า

