



โครงการส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการ และพัฒนา มาตรฐานวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ศึกษา (สอน)

แบบทดสอบวิชาคณิตศาสตร์ สัปดาห์ที่ 7 กันยายน 2551

ตอนที่ 1 ชุดวิชาคณิตจำนวน 10 ข้อ (ข้อ 1 ถึงข้อ 10)

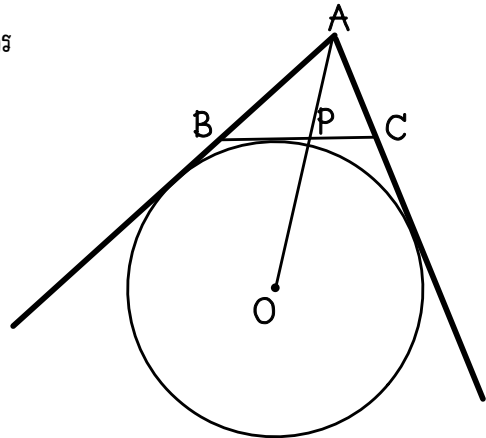
1. รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม $BAC = 2$ เท่าของมุม ABC

วงกลม O แหวนอกสามเหลี่ยม ABC โดยสัมผัสด้าน BC และ AB, AC ที่ต่อออกไป

ต่อ AO ตัดด้าน BC ที่ P

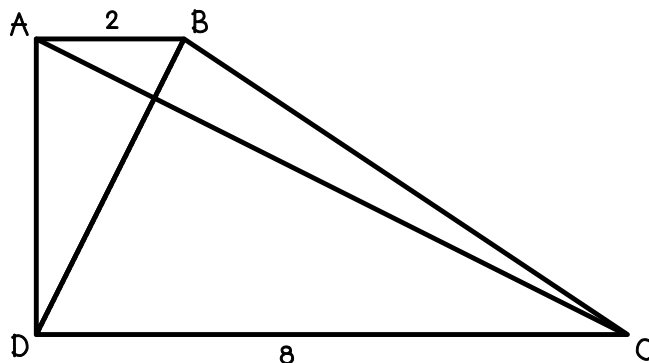
กำหนดให้ $AP = 3$ เซนติเมตร และ $AB = 5$ เซนติเมตร

ความยาว AO เท่ากับกี่มิลลิเมตร



2. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู มีด้าน AB ขนานกับด้าน DC มีมุม ADC เป็นมุมฉาก และเส้นทแยงมุม AC, BD ตัดตั้งฉากกัน

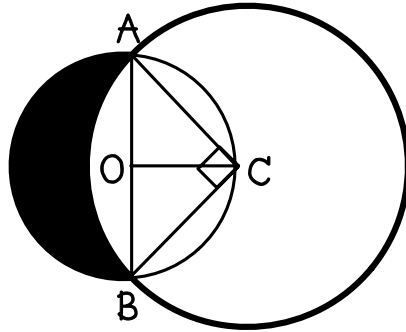
ถ้า $AB = 2$ เซนติเมตร $DC = 8$ เซนติเมตรแล้ว ความยาว BD เท่ากับกี่เซนติเมตร



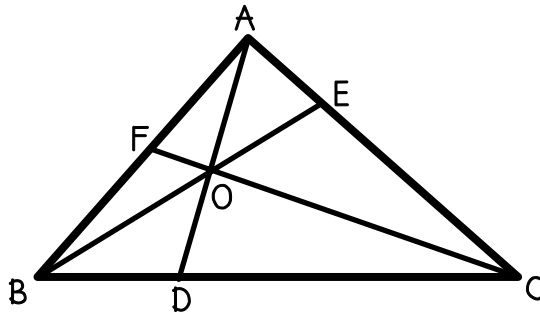


3. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉาก โดยมีมุม ACB เป็นมุมฉาก และด้าน AC เท่ากับด้าน CB ลาก CO ตั้งฉากกับ AB ที่จุด O สร้างวงกลมโดยใช้ C เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี CA และสร้างวงกลมโดยใช้ O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี OC เกิดพื้นที่แรเงา ดังรูป

ถ้า $AB = 2\sqrt{2}$ หน่วยแล้ว พื้นที่แรเงาเท่ากับกี่ตารางหน่วย



4. รูปสามเหลี่ยม ABC มีจุด E แบ่งด้าน AC เป็นอัตราส่วน $AE : AC = 1 : 5$ และจุด F แบ่งด้าน AB ออกเป็นอัตราส่วน $AF : AB = 2 : 5$ ต่อกัน BE และ CF ตัดกันที่จุด O ต่อกัน AO พบ BC ที่จุด D ถ้า AO ยาว 11 หน่วยแล้ว AD ยาวกี่หน่วย

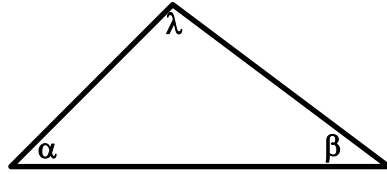




5. จากรูป สามเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมทั้งสามเป็น α° , β° , γ°

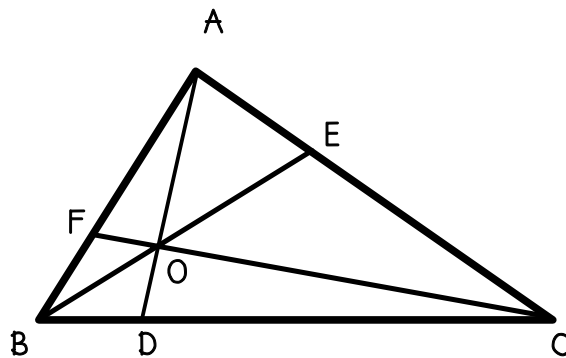
จงหาจำนวนวิธีในการเลือก α , β , γ โดยที่ $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ และ α , β , γ เป็นจำนวนเต็มบวก

ตั้งแต่ 1 ถึง 178



6. รูปสามเหลี่ยม ABC มีจุด O อยู่ภายใน ต่อก AO พบ BC ที่จุด D ต่อก BO พบ AC ที่จุด E และต่อก CO พบ AB ที่จุด F ตามลำดับ ทำให้ $BO : OE = 2 : 3$, $AO : OD = 3 : 1$

ถ้า CO ยาว 17 หน่วยแล้ว CF ยาวกี่หน่วย

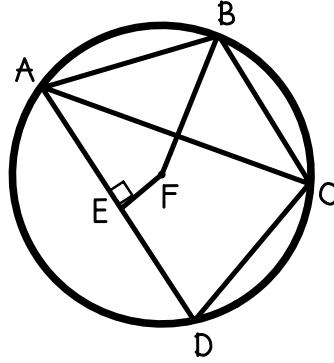




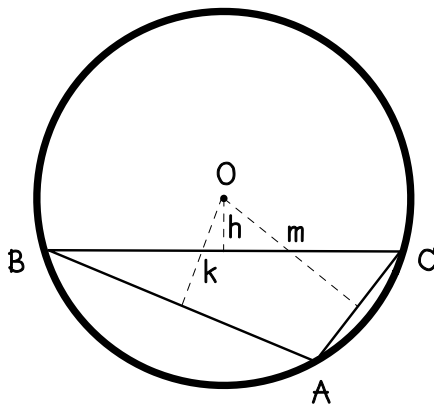
7. รูปสี่เหลี่ยม ABCD แขนงในวงกลม มีด้าน AB เท่ากับด้าน BC เส้นแบ่งครึ่ง และตั้งฉากกับด้าน AD ที่จุด E พบเส้นแบ่งครึ่งมุม B ที่จุด F

ถ้ามุม DAC เท่ากับ 36 องศา และมุม ADC เท่ากับ 74 องศา

แล้ว มุม BFE กางกี่องศา

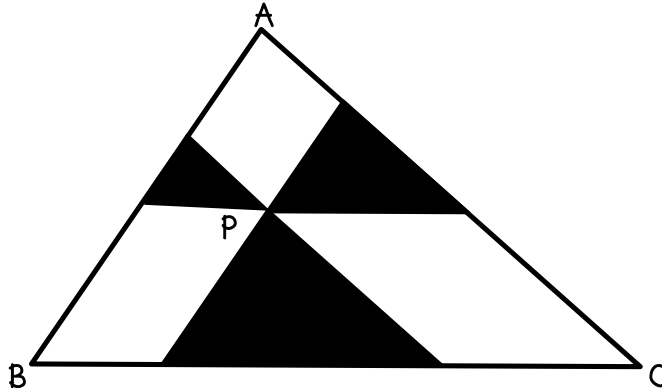


8. รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้าน BC เท่ากับ 24 หน่วย และมีวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC มีเส้นรอบวงเท่ากับ 30π หน่วย ถ้า h, k, m แทนระยะตั้งฉากที่ลากจากจุดศูนย์กลางวงกลม O มายังด้าน BC, AB และ AC ตามลำดับ ถ้า k ยาวกว่า h 3 หน่วย และ m สั้นกว่าด้าน AB 4 หน่วย แล้ว ด้าน AC เท่ากับกี่หน่วย





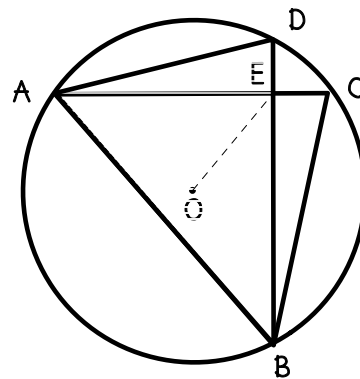
9. จุด P เป็นจุดภายในรูปสามเหลี่ยม ABC เส้นตรงลากผ่านจุด P ขนานกับด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม
 นี้พื้นที่สามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่จุด P มีพื้นที่เท่ากับ 9, 25 และ 49 หน่วยตามลำดับ
 แล้ว พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับกี่ตารางหน่วย



10. BCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลม ที่มีจุด O เป็นจุดศูนย์กลาง เส้นทแยงมุม AC และ BD
 ตัดตั้งฉากกันที่จุด E

ถ้า $AC = 14$, $BD = 16$ และ $OE = 7$ ตามลำดับ

ค่าของ $AE^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2$ เท่ากับเท่าไร





ตอนที่ 2 ชุดเลขคณิต จำนวน 10 ข้อ (ข้อ 11 ถึงข้อ 20)

บทนิยาม สำหรับจำนวนเต็มบวก n กำหนด $\text{sum}(n)$ แทนผลบวกของเลขโดดทุกจำนวนที่เขียนแทน n ในระบบฐาน 10 เช่น $\text{sum}(1135) = 1 + 1 + 3 + 5 = 10$ เป็นต้น

จงใช้บทนิยามนี้ตอบคำถามข้อ 11 - 12

11. ให้ $N = (10^2 + 1)(10^{2^2} + 1)(10^{2^3} + 1) \dots (10^{2^7} + 1)$

จงหา $\text{sum}(N)$

12. ให้ $X = \{\text{sum}(7n) / n \in \{1, 2, 3, \dots, 10000\}\}$

ถ้า a เป็นจำนวนที่น้อยที่สุดใน X และ b เป็นจำนวนที่มากที่สุดใน X แล้ว $a + b$ เท่ากับเท่าไร

13. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนด $M(n)$ แทนจำนวนที่เกิดจากการนำหลักหน่วยของ n มาเป็นหลักแรก เช่น $M(123) = 312$ และ $M(6471) = 1647$

จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

ก) $M(n) = 4n$

ข) หลักหน่วยของ n คือ 4





14. จำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1000 ถึง 9999 มีทั้งสี่หลักจำนวน ที่ผลต่างระหว่างหลักหน่วยกับหลักพันเท่ากับ 2

15. ให้ $N = 1 + 11 + 111 + \dots + 111\dots 1$ (2008 หลัก)

จงหาเศษที่ได้จากการหาร N ด้วย 100000

16. ลูกบาศก์ลูกหนึ่ง สร้างจากลูกบาศก์ลูกเล็กๆ จำนวน 125 ลูก

จงหาจำนวนลูกบาศก์ลูกเล็กๆ ที่สัมผัสกับหน้าลูกบาศก์ลูกอื่นๆ 4 ลูก

17. มีจำนวนเต็มบวก m, n รวมทั้งสี่หลัก ที่สอดคล้องกับสมบัติทั้งสองข้อต่อไปนี้

ก) $m \leq n$

ข) ค.ร.น. ของ m, n เท่ากับ 250





18. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนด $D(n)$ แทนเซตของเลขโดดที่เขียนแทน n
เช่น $D(1231) = \{1, 2, 3\}$ และ $D(742) = \{2, 4, 7\}$

จงหาจำนวนของจำนวนเต็มบวก N ที่สอดคล้องกับ

ก) $10000 \leq N \leq 100000$

และ ข) $D(N)$ มีสมาชิก 3 ตัว และ $D(N) \subseteq \{1, 2, \dots, 9\}$

19. ให้ $X = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$

จงหาจำนวนสับเซต $\{a, b\}$ ของ X โดยที่ $a < b$ และ $a * b$ เป็นพหุคูณของ 5

20. ให้ $f : \mathbb{I}^+ \rightarrow \mathbb{I}$ ที่กำหนดโดย $f(n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} i$

จงหาจำนวนเต็มบวก a, b ที่ $a + b$ น้อยที่สุด และ $f(a) + f(b) + f(a + b) = 2008$





ตอนที่ 3 ชุดพีชคณิต จำนวน 10 ข้อ (ข้อ 21 ถึงข้อ 30)

21. ให้ x, y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ

$$4x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$$

จงหาค่าของ $4(4y^2 + x^2 + 4y - 2x + 2)$

22. ให้ $X = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / a^3 + b^3 = 7 \text{ และ } a^2 + b^2 + a + b + ab = 4\}$

$$\text{และ } Y = \{a^2 + b^2 / (a, b) \in X\}$$

ค่าเฉลี่ยสุดของสมาชิกใน Y เท่ากับเท่าไร

23. ให้ q_1, q_2, \dots, q_n เป็นจำนวนตรรกยะที่สอดคล้องกับ

$$\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}} = 2^{q_1} + 2^{q_2} + \dots + 2^{q_n}$$

จงหาค่าของ $2(n + q_1 + q_2 + \dots + q_n)$





24. ให้ $X = \{a \in \mathbb{I}^+ / \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = a\} \neq \emptyset\}$

จงหาผลบวกของสมาชิกใน X

25. มีจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมดกี่จำนวนที่สอดคล้องกับอสมการ

$$100 < \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} < 1000$$

26. ให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับ $z^x = y^{2x}$, $2^z = 2 \cdot 4^x$ และ $x + y + z = 16$
ค่าของ $x^2 + y^2 + z^2$ เท่ากับเท่าไร





27. ให้ x, y, z เป็นคำตอบของระบบสมการ

$$(x + y)(x + y + z) = 18$$

$$(y + z)(x + y + z) = 30$$

$$(z + x)(x + y + z) = 2$$

$x + y + z$ เท่ากับเท่าไร

28. ให้ $S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2007^2} + \frac{1}{2008^2}}$

ถ้า $S = a + \frac{b}{c}$ โดยที่ $a, b, c \in \mathbb{I}^+, b < c$ และ ห.ร.ม. ของ b, c เท่ากับ 1

แล้ว $b + c$ เท่ากับเท่าไร

29. ให้ $S = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 999^{999} + 1000^{1000}$

ถ้า $S = a \times 10^n$ โดยที่ $1 \leq a < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

แล้ว n มีค่าเท่ากับเท่าไร





30. ให้ $f(x)$ แทนพหุนามที่สอดคล้องกับ $(f(x))^2 = x \cdot f(f(x)) + 2008^2$

จงหา $f(2009) \cdot f(-2009)$

วันที่รับแจ้ง เดือน ก้าว พอส่องน่านน้ำนั้น

