



# โครงการส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการ และพัฒนา มาตรฐานวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ศึกษา (สอน)

แบบทดสอบวิชาคณิตศาสตร์ ครอบคลุมวันที่ 28 ธันวาคม 2554

## คำแนะนำในการทำแบบทดสอบ

1. แบบทดสอบนี้เป็นแบบทดสอบชนิดเติมคำตอบมีทั้งหมด 6 หน้า 30 ข้อ ข้อละ 1 คะแนน
2. ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในกระดาษคำตอบที่กำหนดให้
3. ให้ทบทวนแบบทดสอบ
4. ให้อ่านกระดาษคำตอบเพื่อให้ง่ายต่อการเก็บรวบรวม และให้นักเรียนนำข้อสอบออกไปได้

## ข้อตกลง

1. ให้  $Z, R$  แทนเซตของจำนวนเต็ม และเซตของจำนวนจริง ตามลำดับ
2. ให้  $Z^+, R^+$  แทนเซตของจำนวนเต็มบวก และเซตของจำนวนจริงบวก ตามลำดับ
3. ให้  $X$  แทนเซตจำกัด กำหนด  $|X|$  แทนจำนวนสมาชิกของ  $X$
4. เขียนคำตอบในรูปทศนิยม 2 ตำแหน่ง เช่น คำตอบ 15 ให้เขียนคำตอบเป็น 15.00

คำตอบ 18.324 ให้เขียนคำตอบเป็น 18.32 คำตอบ 17.125 ให้เขียนคำตอบเป็น 17.13

5. ให้ใช้ 3.14 แทนค่าประมาณของ  $\pi$

1. ให้  $f : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$  เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และ  $g(x)$  เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$g(x) = 1 - f(x + 1)$$

ถ้าโดเมนของ  $g$  คือ  $[a, b]$  และเรนจ์ของ  $g$  คือ  $[c, d]$  แล้ว  $b + a + c + d$  เท่ากับเท่าใด

2. ให้  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |3x - 18| + |2y + 7| \leq 3\}$

อาณาบริเวณ  $R$  มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย





3. ให้  $a, b$  เป็นรากของสมการ  $x^2 - mx + 2 = 0$

ถ้า  $a + \frac{1}{b}$  และ  $b + \frac{1}{a}$  เป็นรากของสมการ  $x^2 - px + q = 0$  แล้ว  $q$  เท่ากับเท่าไร

4. ให้  $r$  และ  $s$  แทนจำนวนจริงที่แตกต่างกัน และทำให้

$$\frac{r}{s} + \frac{r + 10s}{s + 10r} = 2$$

จงหาค่าของ  $\frac{r}{s}$

5. ให้  $f$  เป็นพหุนามที่สอดคล้องกับ  $f(x + 3) = 3x^2 + 7x + 4$

ถ้า  $f(x) = ax^2 + bx + c$  แล้ว  $a - b + c$  เท่ากับเท่าใด

6. ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย  $f(x) = ax + b$  โดยที่  $a, b$  เป็นค่าคงตัว

ถ้า  $f(1) \leq f(2)$ ,  $f(3) \geq f(4)$  และ  $f(5) = 5$  แล้ว  $\sum_{i=0}^{10} f(i)$  เท่ากับเท่าใด

7. ให้  $f$  เป็นพหุนามที่สอดคล้องกับ  $f(x) = ax^4 - bx^2 + x + 5$  โดยที่  $a, b$  เป็นค่าคงตัว

ถ้า  $f(-3) = 2$  แล้ว  $f(3)$  เท่ากับเท่าใด





8. ระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุด  $(0, 0)$  ไปยังจุด  $(12, 16)$  โดยไม่ผ่านจุดภายในของวงกลมที่มีสมการ

$$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 25$$

เท่ากับกี่หน่วย

9. ให้  $X = \{3x + 4y \mid x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6\}$

ถ้า  $X = [a, b]$  แล้ว  $b - a$  เท่ากับเท่าใด

10. มีจำนวนเต็ม  $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$  เพียงชุดเดียวเท่านั้นที่สอดคล้องกับ

$$\frac{5}{7} = \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \frac{a_4}{4!} + \frac{a_5}{5!} + \frac{a_6}{6!} + \frac{a_7}{7!}$$

โดยที่  $0 \leq a_i < i$  สำหรับ  $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$

แล้ว  $\sum_{i=2}^7 a_i^2$  เท่ากับเท่าไร

11. ให้  $k = 2011^2 + 2^{2011}$

จงหาเศษที่เกิดจากการหาร  $k^2 + 2^k$  ด้วย 10

12. ให้  $X = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \mid \text{ห.ร.ม.}(a, b) = 1 \text{ และ } \frac{a}{b} + \frac{14b}{9a} \in \mathbb{Z}\}$

จงหา  $|X|$





13.  $a, b, c, d, e$  เป็นจำนวนเต็มทีสอตค้ล้องกั้บ

(i)  $a < b < c < d < e$  และ

(ii)  $(6 - a)(6 - b)(6 - c)(6 - d)(6 - e) = 45$

จงหกร  $a + b + c + d + e$

14. ใ้  $X = \left\{ n \in \mathbb{Z} / \sqrt{\frac{n}{20 - n}} \in \mathbb{Z} \right\}$  แล้  $|X|$  เท่กั้บเท่กั้ใด

15. ใ้  $x, y \in \mathbb{Z}^+$  แล้  $y \geq 2$

ถ้  $x$  เป็นเศษษทีเกิดกักรกรหกร 2312, 1417 แล้ 1059 ดั้บ  $y$  แล้  $y - x$  เท่กั้บเท่กั้ไร

16. ใ้  $X = \{(a, b, c) / a, b, c \in \mathbb{Z}^+ \text{ แล้ } a \cdot b \cdot c = 2310\}$

แล้  $Y = \{a + b + c / (a, b, c) \in X\}$

ถ้  $m, M$  เป็นค้ห้อยทีสอต แล้หกรทีสอตใ้  $Y$  ตกรลั้ดึบ แล้  $M - m$  เท่กั้บเท่กั้ใด

17. ใ้  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  ทีกั้กรหกรดึบ

$$f(n) = f(n) = \begin{cases} n+3 & \text{เมื่ } n \text{ เป็นจ้กรนเด็มค้} \\ \frac{n}{2} & \text{เมื่ } n \text{ เป็นจ้กรนเด็มคู้} \end{cases}$$

จงหกรจ้กรนเด็มค้  $k$  ทีสอตค้ล้องกั้บ  $f(f(f(k))) = 27$





18. ให้  $n \in \mathbb{Z}^+$  กำหนด  $E(n)$  แทนผลบวกของเลขโดดที่เป็นจำนวนคู่ทุกจำนวนที่เขียนแทน  $n$

เช่น  $E(21483) = 2 + 4 + 8 = 14$

จงหา  $\sum_{i=1}^{100} E(i)$

19. กำหนดลำดับของจำนวนเต็มบวกเป็นไปตามกฎต่อไปนี้

1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, ...

จงหาผลบวกของ 1234 พจน์แรกของลำดับข้างต้น

20. 134, 2469, 3789 เป็นตัวอย่างของจำนวนเต็มที่มีเลขโดดแต่ละหลักมากกว่าเลขโดดที่อยู่ทางซ้าย  
จากการคำนวณพบว่า มีจำนวนเต็มบวกที่อยู่ระหว่าง 10000 กับ 100000 ที่มีสมบัติข้างต้นอยู่ 126 จำนวน  
เมื่อหา 126 จำนวนข้างต้นมาเรียงจากน้อยไปหามาก จงหาจำนวนที่อยู่ในอันดับที่ 100

21. ให้  $ABCD$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส  $M$  เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน  $\overline{AB}$   
และ  $E$  เป็นจุดตัดของด้าน  $\overline{CM}$  และ  $\overline{BD}$

จงหา  $\frac{EB}{EM}$





22. ใ้  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี  $\angle ABC$  เป็นมุมฉาก

ลาก  $\overline{BD} \perp \overline{AC}$  ที่จุด  $D$

ถ้า  $AD$  ยาว 3 หน่วย และ  $DC$  ยาว 4 หน่วย

แล้ว น้ที่ของรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  เท่ากับกี่ตารางหน่วย

23. กำหนดให้  $A$  และ  $C$  เป็นจุดอยู่บนวงกลมที่มี  $O$  เป็นจุดศูนย์กลาง

$B$  เป็นจุดภายนอกวงกลมที่  $\overline{BA}$  และ  $\overline{BC}$  เป็นเส้นสัมผัสวงกลมนั้น และสามเหลี่ยม  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ถ้าวงกลมตัด  $\overline{BO}$  ที่  $D$  จงหา  $\frac{BD}{BO}$

24. ใ้  $ABCD$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ 1 ตารางหน่วย

$E$  เป็นจุดภายในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส  $ABCD$  ทำให้  $ABE$  เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ใ้  $R$  แทนอาณาบริเวณที่ประกอบด้วยจุดทุกจุดที่อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยม  $ABCD$  และอยู่ภายนอก

รูปสามเหลี่ยม  $ABE$  และมีระยะห่างจาก  $AD$  ตั้งแต่  $\frac{1}{3}$  ถึง  $\frac{2}{3}$  หน่วย

จงหาว่าพื้นที่ของ  $R$  เท่ากับกี่ตารางหน่วย

25. ทรงพีระมิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส  $ABCD$  เป็นฐาน และ  $E$  เป็นจุดยอด

ถ้าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม  $ABCD$  เท่ากับ 196 ตารางหน่วย และพื้นที่ของสามเหลี่ยม  $ABE$

และสามเหลี่ยม  $CDE$  เท่ากับ 105 และ 91 ตารางหน่วย ตามลำดับ

จงหาว่าปริมาตรของทรงพีระมิดนี้เท่ากับกี่ลูกบาศก์หน่วย

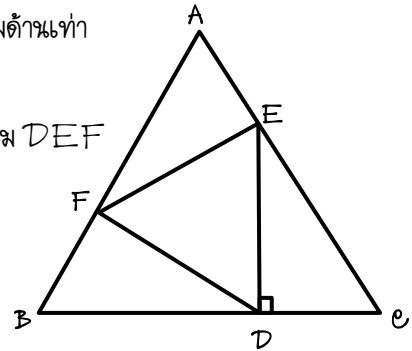




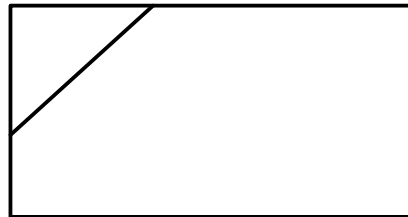
26. ให้  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยม  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$  และ  $\overline{CF}$  เป็นเส้นตรงที่ลากจากจุด  $A, B, C$  ไปตั้งฉากกับด้าน  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  และ  $\overline{AB}$  ที่จุด  $D, E, F$  ตามลำดับ  
 ถ้า  $\overline{AD}$  ยาว 12 หน่วย  $\overline{BE}$  ยาว 15 หน่วย และ  $\overline{CF}$  ยาว 20 หน่วย  
 จงหาว่ามุมที่ใหญ่ที่สุดของรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  กางกี่องศา

27. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า  $DEF$  แนบในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า โดยที่  $\overline{DE} \perp \overline{BC}$  ดังรูป

จงหาอัตราส่วนของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม  $ABC$  ต่อพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม  $DEF$



28. รูปห้าเหลี่ยมรูปหนึ่งถูกสร้างจากการตัดมุมหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากดังรูป  
 จากการสร้างรูปห้าเหลี่ยมข้างต้นทำให้รูปห้าเหลี่ยมนี้มีความยาวของด้านทั้งห้าเป็น 13, 19, 20, 25  
 และ 31 หน่วย (ความยาวที่กำหนดอาจไม่เรียงตามลำดับด้านของรูปห้าเหลี่ยม)  
 จงหาว่ารูปห้าเหลี่ยมนี้มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย

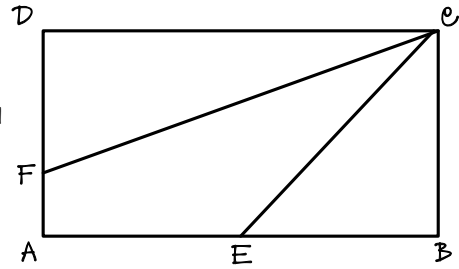




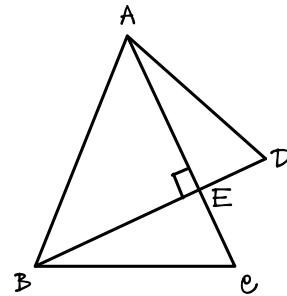
29. ในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก  $ABCD$  มุม  $C$  ถูกแบ่งออกเป็นสามส่วนเท่าๆ กัน โดย  $\overline{CF}$  และ  $\overline{CE}$  ดังรูป

ถ้า  $BE$  ยาว 6 หน่วย และ  $AF$  ยาว 2 หน่วย

จงหาว่าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก  $ABCD$  เท่ากับกี่ตารางหน่วย



30.  $ABC$  และ  $ABD$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว  
ที่  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BD}$  มีความยาวเท่ากัน และ  $\overline{BD}$  ตัดกับ  $\overline{AC}$  ที่จุด  $E$  ดังรูป  
ถ้า  $\overline{BD} \perp \overline{AC}$   
จงหาว่า  $\angle ACB + \angle ADB$  เท่ากับกี่องศา



วันที่เปลี่ยนแปลง เดือนแปด พอสองหน้าหน้าสี่

