



## แบบทดสอบวิชาคณิตศาสตร์ 28 สิงหาคม 2548

โครงการส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการ และพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ และคณิตศาสตร์ศึกษา (ลอวท)

เวลา 9.00 - 12.00 น.

โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย

1. กำหนดให้  $x$  เป็นจำนวนจริงบวก และ  $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2}$

แล้ว ค่าของ  $\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)^2$  เท่ากับเท่าไร

2. ให้  $U = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$

กำหนด  $A = \{a + b/a, b \in U \text{ และ } |a^2 - 2b^2| = 1\}$

ให้  $m$  และ  $M$  เป็นค่าน้อยสุดและค่ามากที่สุดของ  $A$  ตามลำดับ

ค่าของ  $m + M$  เท่ากับเท่าไร

3. ให้  $A = \{x^2 - 3x + 2 / x^2 + 2x - 3 \geq 0\}$

ค่าน้อยสุดของสมาชิกในเซต  $A$  เท่ากับเท่าไร

4. กำหนดรูปสามเหลี่ยม  $ABC$

จุด  $D$  เป็นจุดบนด้าน  $BC$  ที่ทำให้  $BD : DC = 3 : 2$

และ จุด  $E$  เป็นจุดบนด้าน  $AC$  ที่ทำให้  $AE : EC = 3 : 1$

ต่อ  $AD, BE$  ให้ตัดกันที่จุด  $O$  ตลาก  $CO$  ต่อไปจนตัด  $AB$  ที่จุด  $F$

แล้ว อัตราส่วนของพื้นที่สามเหลี่ยม  $AOF$  ต่ออัตราส่วนของพื้นที่สามเหลี่ยม  $FOB$  มีค่าเท่าใด

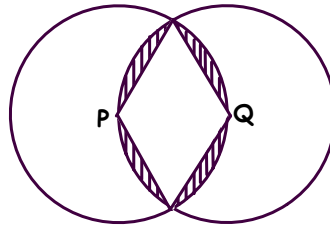




5. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส  $ABCD$  มีด้านยาวด้านละ 12 นิ้ว  
ต่อ  $AD$  ไปถึงจุด  $E$  ให้  $DE$  ยาวเท่ากับ 16 นิ้ว ลาก  $EC$  ต่อกันตัด  $AB$  ที่ต่อออกมาที่จุด  $F$   
และต่อ  $BA$  ไปทางด้านตรงข้ามจุด  $F$  ถึงจุด  $G$  ทำให้  $AG$  เท่ากับ  $EF$  แล้ว  $GD$  ยาวกี่นิ้ว

6. วงกลม  $P$  และวงกลม  $Q$  เป็นวงกลมสองวง มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวเท่ากัน และเท่ากับ 4 เซนติเมตร ตัดกัน  
โดยที่วงกลม  $P$  ผ่านจุด  $Q$  และวงกลม  $Q$  ผ่านจุด  $P$  ดังรูป

ถ้าพื้นที่ในส่วนที่แรเงาเท่ากับ  $\frac{a\pi}{b} - c\sqrt{d}$  ตารางเซนติเมตร เมื่อ  $a, b, c, d$  เป็นจำนวนเต็มบวก  
แล้ว  $a + b + c + d$  เท่ากับเท่าไร



7. รูปสามเหลี่ยม  $ABC$  มีด้าน  $AB$  ยาว 6 นิ้ว ด้าน  $BC$  ยาว 8 นิ้ว และด้าน  $AC$  ยาว 10 นิ้ว  
สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส  $ACDE$  บนด้าน  $AC$   
จงหา ความยาวของด้าน  $BD$

8. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู  $ABCD$  มีด้าน  $AB$  ขนานกับด้าน  $DC$  ด้าน  $AB$  ยาว 10 เซนติเมตร  
ด้าน  $DC$  ยาว 7 เซนติเมตร ต่อ  $AB$  ออกไปถึง  $E$  แล้วลาก  $DE$  ตัด  $BC$  ที่  $X$  ทำให้พื้นที่สามเหลี่ยม  $DCX$  มีพื้นที่  
เท่ากับพื้นที่สามเหลี่ยม  $XBE$

ถ้ากำหนดจุด  $Y$  บน  $AB$  ที่ทำให้พื้นที่สามเหลี่ยม  $DXA$  เท่ากับพื้นที่สามเหลี่ยม  $DYA$   
แล้ว ความยาวของ  $YB$  เท่ากับกี่เซนติเมตร

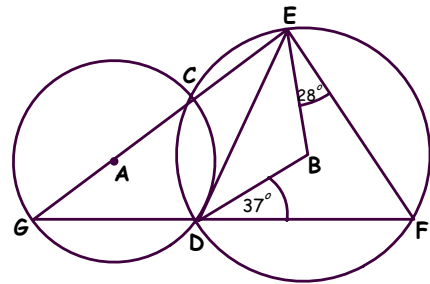




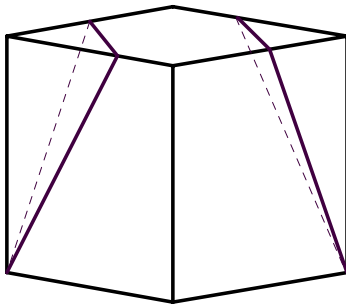
9. ให้  $A$  และ  $B$  เป็นวงกลมสองวง ตัดกันดังรูป

ถ้าขนาดของมุม  $BEF = 28^\circ$  และขนาดของมุม  $BDF = 37^\circ$

แล้ว ขนาดของมุม  $AGD$  เท่ากับกี่องศา



10. รูปสี่เหลี่ยมทรงลูกบาศก์มีด้านยาวด้านละ 4 นิ้ว แบ่งครึ่งด้าน และตัดมุมของรูปทรงตันออกทั้งสองข้าง ดังรูป รูปทรงตันใหม่หลังจากการตัดมุมทั้งสองดังกล่าวออกแล้ว จะมีพื้นที่ผิวเท่ากับกี่ตารางนิ้ว



11. วงกลม  $P$  และวงกลม  $Q$  เป็นวงกลมสองวง ที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวเท่ากับ 12 และ 16 เซนติเมตร ตามลำดับ ตัดกันที่จุด  $A$  และ  $B$  ทำให้  $PA$  เป็นเส้นสัมผัสวงกลม  $Q$  และ  $QB$  เป็นเส้นสัมผัสวงกลม  $P$  รัศมีของวงกลมที่ใหญ่ที่สุดที่แนบในบริเวณที่เป็นส่วนตัดของวงกลมทั้งสอง มีความยาวกี่เซนติเมตร

12. จงหาจำนวนเต็มบวก  $n$  ที่น้อยที่สุดที่ทำให้มีจำนวนเต็มบวก  $k$  และ

$$10,000 = n + (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + k)$$





13. ให้  $a_9 a_8 a_7 \dots a_3 a_2 a_1 a_0$  เป็นการเขียนแทนจำนวนเต็มบวก  $N$  ในระบบฐาน 10 ที่ประกอบด้วยเลข  
สิบหลัก

$$\text{ถ้า } a_9 = 6 \text{ และ } a_8 a_7 \dots a_3 a_2 a_1 a_0 = \frac{1}{25} N$$

แล้ว  $a_9 + a_8 + a_7 + \dots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$  เท่ากับเท่าไร

14. มีลูกบาศก์ขนาด 1 ลูกบาศก์เซนติเมตร จำนวน 27 ลูก ประกอบด้วยลูกบาศก์สีขาว 7 ลูก และสีแดง 20 ลูก  
นำมาจัดเป็นลูกบาศก์ขนาด  $3 \times 3 \times 3$  ลูกบาศก์เซนติเมตร ในการจัดดังกล่าว ถ้าต้องการจัดให้พื้นที่ผิวของลูกบาศก์  
เป็นพื้นที่สีขาวน้อยที่สุด จะได้พื้นที่ผิวที่เป็นสีขาวกี่ตารางเซนติเมตร

15. ให้  $U = \{1, 2, 3, \dots, 121\}$

$$A = \{x \in U / x \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}\}$$

$$B = \{x \in U / x \text{ เป็นพหุคูณของ 3}\}$$

จงหาจำนวนสมาชิกในเซต  $X$  เมื่อ  $X = (A - B) \cup (B - A)$

16. ให้  $N$  แทนจำนวนเต็มบวก ประกอบด้วยเลข 2548 หลัก โดยที่

$$N = 123456789101112131415 \dots x$$

จงหาค่า  $x$  ซึ่งเป็นเลขหลักหน่วยของ  $N$

17. กำหนดระบบสมการ

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$(x - a)^2 + y^2 = 1$$

จงหาจำนวนจริงบวก  $a$  ที่ทำให้ระบบสมการนี้มีคำตอบเพียง 2 คำตอบเท่านั้น





18. จงหาจำนวนเต็ม  $a$  ทุกจำนวน ที่ทำให้มีจำนวนเต็ม  $b$  และ

$$(x - a)(x - 10) + 1 = (x + b)^2$$

19. ให้  $a_1, a_2, a_3, \dots$  เป็นลำดับของจำนวนเต็มที่เรียงตามกฎต่อไปนี้

(1) ถ้า  $a_n$  เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \times a_n$

(2) ถ้า  $a_n$  เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว  $a_{n+1} = a_n + 1$

ถ้า  $a_1 = 10000$  จงหา  $n$  ที่น้อยที่สุดที่ทำให้  $a_n = 1$

20. ให้  $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

ถ้า  $a3 \times 6528 = 3a \times 8256$  แล้ว  $a$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

หมายเหตุ  $a3$  แทนจำนวนเต็มที่หลักหน่วย คือ 3 และหลักสิบคือ  $a$   
 $3a$  แทนจำนวนเต็มที่หลักหน่วย คือ  $a$  และหลักสิบคือ 3

21. ก๊อกน้ำสองก๊อก คือก๊อก A และก๊อก B ที่มีขนาดต่างกัน

ถ้าเปิดน้ำเฉพาะก๊อก A น้ำจะเต็มถังในเวลา 20 นาที และถ้าเปิดเฉพาะก๊อก B น้ำจะเต็มถังเดียวกันในเวลา 30 นาที

ถ้าเปิดเฉพาะก๊อก A เป็นเวลา 5 นาที แล้วเปิดเฉพาะก๊อก B ต่ออีก 5 นาที หลังจากนั้นเปิดก๊อก A และ B พร้อมกัน ถามว่า เวลาที่ใช้ในช่วงสุดท้ายอีกกี่นาที จึงจะทำให้ น้ำเต็มถัง

22. ให้  $p(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 4$  และ  $\alpha, \beta, \gamma$  เป็นรากทั้งสามของ  $p(x) = 0$

จงหาค่าของ  $2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)$





23. จงหารากที่เป็นจำนวนจริงทั้งหมดของ

$$(2x + 1)(3x + 1)(5x + 1)(30x + 1) = 10$$

24. ให้  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  ;  $a, b, c, d$  เป็นจำนวนจริง

ถ้า  $f(-1) = 0$ ,  $f(2) = -3$ ,  $f(-3) = -8$  และ  $f(4) = -15$

จงหาค่า  $f(1)$

25. จงหาค่าของ  $2548 + \frac{1}{2} \cdot 2547 + \frac{1}{2^2} \cdot 2546 + \dots + \frac{1}{2^{2546}} \cdot 2$

26. จงหา จำนวนเต็มที่มีมากที่สุดที่น้อยกว่า หรือเท่ากับ  $\frac{10^{33}}{10^{31} + 3}$

27. ให้  $U = \{|x - 2| + |x - 4| + |x - 10| / 0 \leq x \leq 12\}$

ถ้า  $U = [a, b]$  แล้ว  $a + b$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

28. ให้  $X = \{(A, B) / A, B \text{ เป็นเซต ซึ่ง } A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}\}$

จงหา จำนวนสมาชิกในเซต  $X$





29. ให้  $p, q, r, s, t, u, v, w$  เป็นประพจน์ ในการสร้างตารางเพื่อแสดงค่าความจริงที่ประกอบด้วย 256  
กรณี ของประพจน์

$$(p \vee q) \vee (r \wedge s) \vee (t \rightarrow u) \vee (v \leftrightarrow w)$$

จะมีทั้งหมดกี่กรณีที่มีค่าความจริงเป็นจริง ( $T$ )

30. จงหาจำนวนเต็มบวก  $n$  ที่น้อยที่สุดที่ทำให้  $2^{\frac{1}{7}} \cdot 2^{\frac{3}{7}} \cdot 2^{\frac{5}{7}} \cdot \dots \cdot 2^{\frac{(2n+1)}{7}}$

มีค่ามากกว่า 10,000

วันที่หนึ่ง เดือนเก้า ร.ศ.สองสองสาม

