



การสอบแข่งขันเพื่อรับทุนฯ ไปศึกษาวิชา ณ ต่างประเทศ ประจำปีงบประมาณ 2553 (ทุกระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย)

วิชาคณิตศาสตร์ คะแนนเต็ม 100 คะแนน เวลา 3 ชั่วโมง

สอบวันเสาร์ที่ 17 ตุลาคม 2552

เวลา 13.30-16.30 น.

ให้ทำข้อ 1 ในสมุดเขียนตอบชุดที่นั้น ข้อ 2 ในสมุดเขียนตอบชุดที่รอง

ข้อ 3 ในสมุดเขียนตอบชุดที่สาม ข้อ 4 ในสมุดเขียนตอบชุดที่สี่

และ ข้อ 5 ในสมุดเขียนตอบชุดที่ห้า

ถ้าทำผิดชุดจะไม่ได้รับการตรวจ

1. (20 คะแนน)

1.1 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มบวก โดย b เป็นตัวประกอบ (factor) ของ a
และ $b + c$ เป็นตัวประกอบของ a

a และ b สัมพันธ์กันอย่างไร จงแสดงวิธีทำ (6 คะแนน)

1.2 ให้ x, y เป็นจำนวนจริง A, B และ C เป็นเซต

สมมุติฐาน (1) $A = \{(x, y) / y < \sqrt{x} \text{ และ } y \geq 0\}$

(2) $B = \{(x, y) / y > -\sqrt{x} \text{ และ } y \leq 0\}$

(3) $C = \{(x, y) / y^2 < x\}$

ผล $A \cup B = C$

การสรุปที่สมเหตุสมผลหรือไม่ จงแสดงวิธีทำ (6 คะแนน)

1.3 จงเขียนแผนภาพเวอเรน-ออยเลอร์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งแทนความหมายประพจน์ต่อไปนี้

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow r)$$

โดยเซต A, B และ C แทนประพจน์ p, q และ r ตามลำดับ

จงแสดงวิธีทำหรืออธิบาย (8 คะแนน)





2. (20 คะแนน) แสดงวิธีทำอย่างคร่าว ๆ คะแนนเต็มข้อย่อยละ 5 คะแนน

2.1 กำหนดให้ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

จงหาค่าของ AB

2.2 จงหาค่าของ x ทั้งหมดที่สอดคล้องสมการ

$$x^5 + x^4 - x(x+1) = 0 \quad \text{และ} \quad x^5 - 4x^3 - x^2 + 4 = 0$$

2.3 กำหนดให้เวกเตอร์ $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ถ้า \vec{w} เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ \vec{u} และ \vec{v} และมีขนาดเท่ากับ $2|\vec{u} + 2\vec{v}|$

แล้ว จงหา \vec{w}

2.4 เมือง B อยู่ห่างจากเมือง A ไปทางทิศตะวันตก 20 กิโลเมตร และอยู่ห่างจากเมือง C ไปทางทิศตะวันออกเฉียงใต้ 25 กิโลเมตร

จงหาระยะทางระหว่างเมือง A กับเมือง C





3. มีข้อย่อย 4 ข้อ ละเอียด 5 คะแนน รวม 20 คะแนน ง่ายแสดงวิธีทำสั้น ๆ

3.1 จงหาค่า x และ y ที่สอดคล้องกับระบบสมการต่อไปนี้

$$x^2 = 1 + 6 \log_4 y$$

$$y^2 = 2^x \cdot y + 2^{2x+1}$$

3.2 จงแก้สมการต่อไปนี้ $2^{4x} - 2^{3x+1} - 2^{2x} - 2^{x+1} - 2 \leq 0$

3.3 เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่งมีจุดปลายทั้งสองเป็นจุดตัดแกน X และ Y ของเส้นตรง

$7x + 5y = 35$ จงหาพิกัดของจุดปลายทั้งสองของเส้นทแยงมุมอีกเส้นหนึ่งของสี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้

3.4 กำหนดวงกลม $C_1(a)$ และ $C_2(a)$ ดังต่อไปนี้

$$C_1(a) : x^2 + y^2 + 2ax + 4ay - 3a^2 = 0$$

$$C_2(a) : x^2 + y^2 - 8ax - 6ay + 7a^2 = 0$$

จงแสดงว่าวงกลมสองวงสัมผัสกัน (นี่คือตัดกันที่จุดๆ เดียว) สำหรับทุกๆ $a > 0$ และหาพิกัดของจุดสัมผัสนั้น





4. (20 คะแนน)

ข้อ 4.1 แสดงวิธีหิสูจจร ข้อ 4.2 เปียแฉพะคำตอบ

4.1 จงหิสูจจรว่าฟังก์ชันพหุนาม (10 คะแนน)

$$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1 \text{ ใม่หิค่าสูจจสุดสัสมพีทึ หรือค่าต่ำสูจจสุดสัสมพีทึ}$$

4.2 จงหาค่าของ $A + B$ เชีอ (10 คะแนน)

$$A = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n \text{ โดยที่ } n \text{ เปียคำตอบของสมการ}$$

$$1 + 1 + \log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt[3]{2}} 2 + \dots + \log_{\sqrt[2]{2}} 2 = n^2 - 15$$

แฉะ
$$B = \sum_{i=0}^6 [f(i)]$$

โดยกำหนด $f(i)$ ซึ่ง i เปียจำนวนเต็มที่ไม่เปียลบตั้งหิ

$$f(0) = 1$$

$$f(i) = i + f(i - 1)$$

คำตอบ $A + B =$





5. (20 คะแนน) ให้อแสดงวิธีทำ

5.1 นางสมใจเปิดร้านขายอาหารแห่งหนึ่ง มีแผนที่จะขยายกิจการโดยการส่งอาหารที่ลูกค้าสั่งทางโทรศัพท์ ไปถึงบ้านลูกค้า จึงได้ทำการทดลองส่งอาหารให้ลูกค้าจำนวนหนึ่ง พบว่า เวลาที่ใช้ในการส่งอาหารโดยเฉลี่ยเท่ากับ 18 นาที และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 4 นาที

ถ้านางสมใจเริ่มบริการส่งอาหารถึงลูกค้า จะต้องให้พนักงานรับโทรศัพท์บอกลูกค้าว่าจะส่งอาหารได้ภายในกี่นาที โดยมีความเชื่อมั่น (ก) ร้อยละ 95 (ข) ร้อยละ 99 ถ้าเวลาในการปรุงอาหารทั้งหมดจะเสร็จภายใน 15 นาที (10 คะแนน)

5.2 จากรายการซ่อมแซมเครื่องซักผ้า 6 เครื่อง ปรากฏผลดังนี้

- จำนวนปีที่ใช้งาน (X) โดยเฉลี่ยเท่ากับ 2 ปี โดยมีค่าความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{2}{3}$
- ค่าซ่อมแซมต่อปี (Y) โดยเฉลี่ยเท่ากับ 700 บาท
- $\sum_{i=1}^6 X_i Y_i = 9700$

ถ้าสมการแทนความสัมพันธ์ระหว่างค่าซ่อมแซมต่อปี และจำนวนปีที่ใช้เป็สมการเส้นตรง จงหา

(ก) สมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์นี้ (5 คะแนน)

(ข) ถ้าเครื่องซักผ้าเครื่องหนึ่งมีอาการใช้งานเท่ากับ 4 ปี จะต้องเสียค่าซ่อมแซมต่อปีประมาณเท่าใด (5 คะแนน)

วันที่ _____ เดือน _____ พอสสองหน้าหน้าสาม

