



## การสอบแข่งขันเพื่อรับทุนไปศึกษาวิชา ณ ต่างประเทศ ประจำปี 2547 วิชาคณิตศาสตร์

สอบวันเสาร์ที่ 27 ธันวาคม 2546 เวลา 13.30-16.30 น.

### 1. (20 คะแนน)

1.1 ให้  $X$  และ  $A$  เป็นเซตโดย  $(X \cap A') \cup (X' \cap A) = A$

จะทราบหรือไม่ว่า  $X$  เป็นเซตอะไร เพราะเหตุใด

1.2 ข้อความต่อไปนี้ มีค่าความจริงเป็นจริงหรือไม่

$$\sim \exists x[P(x)] \rightarrow (\exists x[\sim P(x)] \vee \forall x[P(x)])$$

จงแสดงเหตุผลประกอบคำตอบ

### 2. มี 2 ข้อย่อย ให้เขียน เฉพาะคำตอบลงในสมุดเขียนตอบ โดยระบุหมายเลขข้อย่อยของแต่ละคำตอบให้ชัดเจน

2.1 ไฮเพอร์โบลา  $H$  มีสมการเป็น  $3x^2 - 2y^2 - 6x + 8y + 1 = 0$  และวงรี  $E$  มีจุดโฟกัสร่วมกับ  $H$  และ  $E$  ผ่านจุด  $(0, 2)$  จงหา (10 คะแนน)

- 1) จุดศูนย์กลางของ  $H$
- 2) จุดโฟกัสทั้งสองของ  $H$
- 3) สมการของ  $E$
- 4) ความยาวแกนเอกของ  $E$
- 5) สมการของวงกลมที่ใหญ่ที่สุด ที่แนบในวงรี  $E$

2.2 ให้  $f$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ซึ่งมีกราฟตัดกันที่จุด  $(1, -1)$

$$f \circ g(1) = -5 \text{ และ } (f + g)(2) = 3$$

และ  $h$  เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ โดยที่คาบของ  $h$  เท่ากับ 2 และ  $h(x) = f(x)$  ทุก  $x \in [-1, 1)$

จงหา (10 คะแนน)

- 1)  $f(x)$
- 2)  $g(x)$
- 3)  $f^{-1}(x)$
- 4)  $g \circ f(x)$
- 5)  $h(100)$



3. เขียนเฉพาะคำตอบลงในสมุดเขียนตอบ ไม่ต้องแสดงวิธีทำ (20 คะแนน)

3.1 ให้  $A$  เป็นเซตคำตอบของสมการ  $3x^2 + 2x - 3x^2 + 1 - 9x + 1 + 27 = 0$

และ  $B$  เป็นเซตคำตอบของสมการ  $\sum_{n=1}^{10} n \log_a(a^n x) = 330$

แล้ว  $A \cup B$  คือเซตใด (7 คะแนน)

3.2 ให้  $A, B, C$  และ  $I$  เป็นเมตริกซ์ มิติ  $4 \times 4$

โดยที่  $\det(-A)^4 = \det(4I)$ ,  $\det(2C)^{-1} = 32$  และ  $AB'C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

แล้ว  $\det B$  มีค่าเท่าใด (6 คะแนน)

3.3 ให้  $C$  เป็นเซตคำตอบของสมการ  $\arctan(2x+1) + \arctan(2x-1) = \arctan 2$

และ  $D$  เป็นเซตคำตอบของสมการ  $\tan \theta + \sec \theta = \sqrt{3}$  ;  $\theta \in [0, 2\pi]$

แล้ว  $C \cup D$  คือเซตใด (7 คะแนน)

4. ให้เขียนเฉพาะคำตอบในสมุดเขียนตอบ (20 คะแนน)

4.1 ให้  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$  และ  $\vec{v} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$  เป็นเวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉากที่  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15$  และมุมระหว่าง  $\vec{u}$  กับ  $\vec{v}$  เท่ากับ  $60$  องศา จงหาค่าของ  $a$  และ  $b$  ที่เป็นไปได้ทั้งหมด (4 คะแนน)

4.2 จงแก้สมการ  $x^5 + x^4 + 13x^3 + 13x^2 + 36x + 36 = 0$  โดยให้คำตอบที่เป็นไปได้ทั้งหมด (5 คะแนน)

4.3 จงหารากที่ 4 ของ  $-1,296$  มาให้หมด (5 คะแนน)



4.4 มีข้อมูลอยู่ 3 ชุด และมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน ดังตารางต่อไปนี้

ชุดที่	ความถี่	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน
1	25	40	0.375
2	35	50	0.400
3	40	25	0.500

นำข้อมูล 3 ชุดนี้ มาคิดเป็นชุดเดียวกัน จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต, ความแปรปรวน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน ของข้อมูลชุดใหม่ (6 คะแนน)

5. ให้แสดงวิธีทำโดยละเอียดทุกข้อ มีข้อย่อย 5 ข้อ คะแนนรวม 20 คะแนน

5.1 กำหนดให้  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

จงหาค่าของผลบวก  $2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2m)^3$  (3 คะแนน)

5.2 มีหลอดไฟอยู่ดวงหนึ่ง หลอดไฟดวงนี้ถูกควบคุมให้สว่างหรือดับ ตามเงื่อนไขดังนี้  
สว่าง 1 วินาที, ดับ 3 วินาที, สว่าง 5 วินาที, ดับ 7 วินาที, ... เป็นเช่นนี้ไปเรื่อยๆ  
จงให้เหตุผลว่า ณ วินาทีที่ 500 หลอดไฟดวงนี้ สว่างหรือดับ (4 คะแนน)

5.3 ถ้า  $\frac{df(x)}{dx} = x^2 + 2x - |x - 1|$  จงหาค่าของ  $f(-2) + f(2)$  (4 คะแนน)

5.4 จงหาค่าของ  $a$  ที่ทำให้  $\int_0^1 (1 + ax)^2 dx$  มีค่าน้อยที่สุด (4 คะแนน)



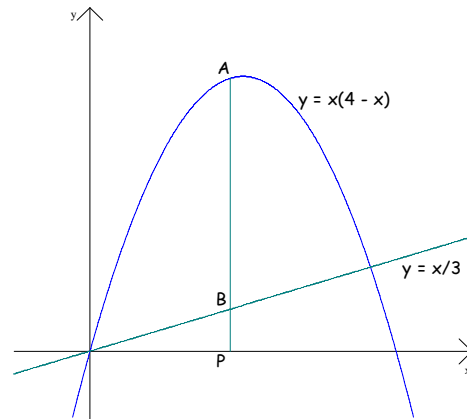
5.5 จากรูป

จุด  $P$  มีพิกัดเป็น  $(t, 0)$  เมื่อ  $0 < x < \frac{11}{3}$

เส้นตรง  $PBA$  ขนานกับแกน  $Y$

จงหาค่าของ  $t$  ที่ทำให้ส่วนของเส้นตรง  $AB$

มีความยาวมากที่สุด (5 คะแนน)



๑๗ กันยายน ร.ศ. ๒๒๒

